

# Laboratóriumi mérések

## 1. Bevezető

Bármilyen mérés annyit jelent, mint meghatározni, hányszor van meg a mérendő mennyiségben egy másik, a mérendővel egynemű, önkényesen egységnek választott mennyiség. Egy mérés eredményét tehát két adat fejezi ki: a **mértékszám** és a **mértékegység**. Bár a mértékegység elvileg teljesen önkényesen, praktikus szempontok figyelembevételével választható meg (pl. láb, arasz, hüvelyk stb.), célszerű azt általános megállapodás útján rögzíteni, hogy a különböző személyek által különböző helyeken és időben végzett mérések eredményei pontosan összehasonlíthatóak legyenek. A különböző mérések összehasonlíthatóságának igénye a történelem előtti időkbe nyúlik vissza. A kereskedelem és a technológia fejlődése fokozatosan szükségessé tette a mérések világméretű egységesítését. A tudományok fejlődése pedig együtt járt a mérések pontossága és megbízhatósága iránti igény rohamos növekedésével. A mérések egységesítésével, pontosságával, megbízhatóságával a mérés tudománya, a **metrológia** foglalkozik. A metrológia törvényes ága a **mérésügy**, amely a különböző **mérőműszerek kalibrálásával, ill. hitelesítésével** foglalkozik. Ma már sok esetben csak olyan mérések eredményeit fogadják el, amelyeket hiteles műszerrel végeztek, ill. a mérést szakemberek pontosan, az előírt módon folytatták le. A természetben megfigyelt törvényeket fizikai összefüggésekkel, tudjuk leírni. Ezek az összefüggések fizikai mennyiségek közötti matematikai egyenletek, kifejezések. Az összes fizikai mennyiség hat, ill. **hét alapmennyiség** segítségével kifejezhető. Ezek az alapmennyiségek: a **hosszúság, tömeg, idő, elektromos áram, termodinamikai hőmérséklet, anyagmennyiség, fényerősség**. Ezen alapmennyiségek mértékegységei, - amelyek önkényesek és praktikusak- a Nemzetközi Mértékegység-rendszer (Le Systeme international d'unités, The International System of Units, SI) szerint:



Mennyiség	SI alapegység	
	neve	jele
hosszúság	méter	m
tömeg	kilogramm	kg
idő	másodperc	s
elektromos áram	amper	A
termodinamikai hőmérséklet	kelvin	K
anyagmennyiség	mól	mol
fényerősség	kandela	cd

Az összes többi fizikai mennyiség a fenti alapegységekből származtatható. A mértékegységüket a definiáló matematikai összefüggés szerint a fenti alapegységekből kapjuk meg.

A **mérés** lehet **közvetlen**, amikor a mérendő mennyiséget közvetlenül az egységgel hasonlítjuk össze, ill. **közvetett**, amikor a meghatározandó fizikai mennyiséget több, közvetlenül mérhető mennyiségből matematikai összefüggéssel számítjuk ki. Mindkét esetben a mérésnek van hibája, azaz a meghatározott mennyiség nem a valódi érték, hanem egy attól eltérő érték lesz.

Laboratórium gyakorlatokon különböző fizikai mennyiségeket határozzunk meg vagy közvetlen, vagy közvetett méréssel. Mindig meg kell határozni a mérés hibáját is. A mérésekről jegyzőkönyvet kell készíteni. A mérési eredményeket szöveggel is értékelni kell.

## 2. Mérési adatok és feldolgozásuk

### 2.1 Fizikai mennyiségek, jelölések

Az alábbiakban közölünk néhány kifejezést, amelyeket mérésekkel kapcsolatban használunk.

**Fizikai mennyiség.** A hozzá kapcsolódó fogalmak: neve, jele, mértékegysége, a mértékegység jele, dimenziója. Mindezekből egyenlet is írható, például a nyomás esetén:

neve	nyomás	példa a jelölésére	példa egyenletére
jele	$p$	$p = 101325 \text{ Pa}$	$p = \frac{F}{A}$
mértékegysége	paszkál		
a mértékegység jele	Pa	$[p] = \text{Pa}$	$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
mérőszáma	101325	$\{p\}_{\text{Pa}} = 101325$	$\{p\}_{\text{Pa}} = \frac{\{F\}_{\text{N}}}{\{A\}_{\text{m}^2}} = \frac{202650}{2} = 101325$
dimenziója	$\text{L}^{-1}\text{MT}^{-2}$	$\dim p$	$\dim p = \frac{\dim F}{\dim A} = \frac{\text{LMT}^{-2}}{\text{L}^2} = \text{L}^{-1}\text{MT}^{-2}$

A jegyzőkönyvi számításoknál felírjuk a kiszámítandó mennyiségre vonatkozó kifejezést a fizikai mennyiségek betűjelével, majd behelyettesítjük a számértékeket a megfelelő mértékegységekkel együtt. A számításokat elvégezzük a számadatokkal és a mértékegységekkel, a végeredményt számadattal és mértékegységgel adjuk meg. Statisztikai (biometriai) számításoknál a mértékegység kírása áttekinthetlenné teszi a számítást, ezért itt elegendő csak az eredmény mértékegységét feltüntetni.

A táblázatok fejlécében készítsünk külön feliratmezőt a mértékegység számára is. A diagramok tengelyfeliratának tartalmaznia kell a fizikai mennyiség nevét, jelét és mértékegységét vesszővel elválasztva egymástól. Zárójelezést csak abban az esetben használunk, ha a feliratozás aritmetikai műveletet tartalmaz. Például  $\ln(p_{\text{Pa}})$  azt jelenti, hogy nem a nyomás mérőszámát tüntettük fel a tengelyen, hanem a Paszkálban mért mérőszám logaritmusát. A mértékegység tört formájában is beírható, pl.  $\ln \frac{p}{\text{Pa}}$

Egység dimenziójú mennyiségek (például hányados) esetén fel kell tüntetni, hogy az, miből származik. Például a relatív megnyúlást ( $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ) a test hosszváltozásának ( $\Delta l$ ) és eredeti hosszának ( $l$ ) hányadosából számítjuk, mértékegységét így jelölhetjük:  $\frac{m}{m}$ . Például

komponens részaránya elegyben, ha a mennyiségét a tömegével határoztuk meg:  $\frac{m_1}{m}$ , mértékegysége  $\frac{kg}{kg}$ .

A prefixumot (tíztes hatványszorzót) mindig úgy használjuk, hogy a mérőszám 1 és 1000 közé essék. Például 0,000 45 V, feszültség helyett írjunk 450  $\mu$ V-t. A 0,023 m magas folyadék oszlop helyett 23 mm magas folyadék oszlop. A mérőszámot úgy tagoljuk – sok mérőszám feltüntetésekor, hogy a számjegyek hármas csoportokat alkossanak. Például az idő mértékegysége -1 szekundum (1 s) - az izzó cézium atom által kibocsátott fényhullám 9 192 631 770 periódusának időtartama.

Néhány esetben megadjuk a kifejezés angol nevét is, mert a zsebszámológépek, vagy a számítógépes szoftverek gyakorta ezt használják.

## 2.2 Hibaszámítás

**Hibaszámítás.** Összefoglaló neve azoknak a megfigyelési és számítási eljárásoknak, amelyek segítségével a **mérés hibájának** nagyságát képesek vagyunk **megbecsülni**. A gyakorlatokon a szórást, az átlagot és az átlag szórását számítjuk ki, használjuk még a relatív hibát, a hibaterjedés törvényeit és számítunk lineáris regressziót.

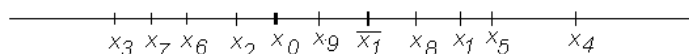
### Átlag, szórás, átlag szórása

Általában egy fizikai mennyiséget nem elég egyszer megmérni, mert ugyanannak a mennyiségnek többször egymásután történő mérésekor egymástól kissé különböző értékeket kapunk. A mérés pontossága függ egyrészt a mérő eszköz érzékenységétől, másrészt a mérést végző személy pontosságától.

Tegyük fel, hogy egy mérendő mennyiség valódi értéke  $x_0$ , ezt az értéket nem ismerjük. Ha **több mérést** végzünk, akkor kapjuk az  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  értékeket;  $n$  a mérések száma. A mért értékek az  $x_0$  körül helyezkednek el; lesznek annál kisebb és annál nagyobb értékek. Ezek **számtani közepe**

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Ez a **mérési sorozat átlaga**, amely az  $x_0$  valódi értéket közelíti. Az  $\bar{x}_1$  átlag eltérését az  $x_0$  valódi értéktől torzításnak nevezzük. A számegegyenesen ábrázolva

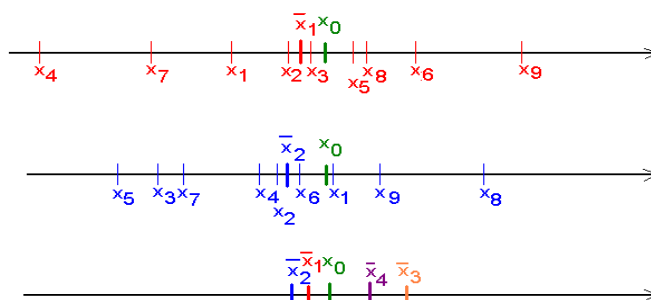


Hogy az egyes értékek milyen "közel" helyezkednek el az  $\bar{x}_1$  környékén, arról a **tapasztalati szórás** ad felvilágosítást. Értékét mindig pozitívnak tekintjük:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_1 - x_i)^2}$$

Ennek a számnak a négyzete a szórásnégyzet, gyakorta hivatkoznak rá.

Ha több mérési sorozatot végzünk, akkor az egyes mérések során kapott átlagok rendre az  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$  értékek. Ezek egyike sem adja meg pontosan az  $x_0$  értékét.



Hogy mennyire szórnak a valódi érték körül az egyes átlagok, azt az **átlag szórása** adja meg. Ez a szám egyben kifejezi azt is, hogy minél több mérést végzünk, annál megbízhatóbb eredményhez jutunk, a neve: az átlag tapasztalati szórása:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

Általában egy mérési sorozat eredményét

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$$

formában adjuk meg, azaz, az átlag plusz-mínusz az átlag szórása. A középérték és a szórás mértékegysége azonos. Zsebszámológépeken a statisztikai üzemmódban az  $x_i$  értékek bevitele után egy gombnyomásra megkaphatjuk az átlagot, a szórást és az átlag tapasztalati szórását. Ha feltételezzük, hogy a mért értékek eloszlása normál eloszlást követ, akkor a mért értékek 68,27 %-a a  $(\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + \sigma_{\bar{x}})$  tartományba esik. A tapasztalati szórás értékét arra használjuk fel, hogy ez legyen a mérési bizonytalanság lehető legjobb becslése.

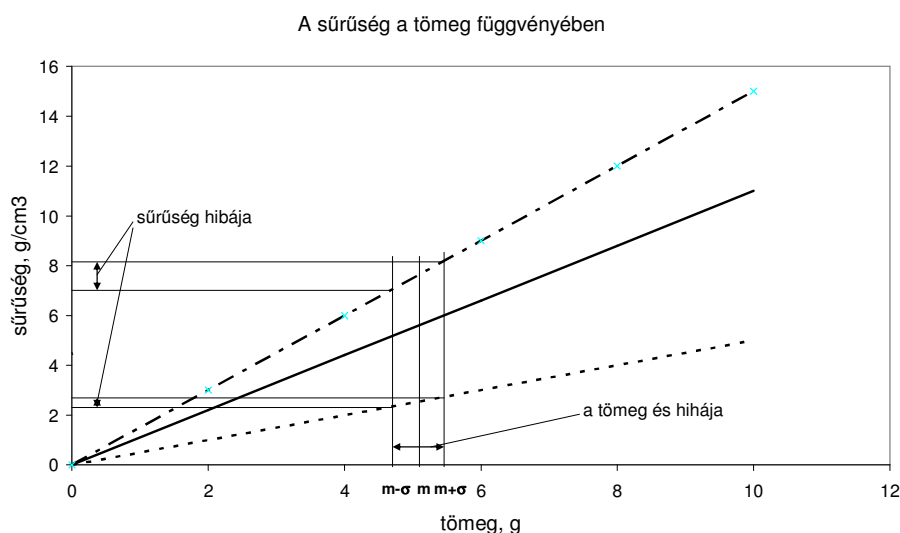
## Hibaterjedés

Sokszor előfordul, hogy több mennyiséget mérünk, és ezekből számítunk egy másik mennyiséget. Például, sűrűséget ( $\rho$ ) nem tudunk mérni, de tudunk mérni tömeget ( $m$ ) és térfogatot ( $V$ ), majd ezekből számítjuk a sűrűséget:  $\rho = \frac{m}{V}$ . Kérdés ilyenkor, hogyan határozható meg a sűrűség hibája ( $\Delta\rho$ ) a tömegmérés és a térfogatmérés hibájából, ( $\Delta m$ ) és ( $\Delta V$ )-ből.

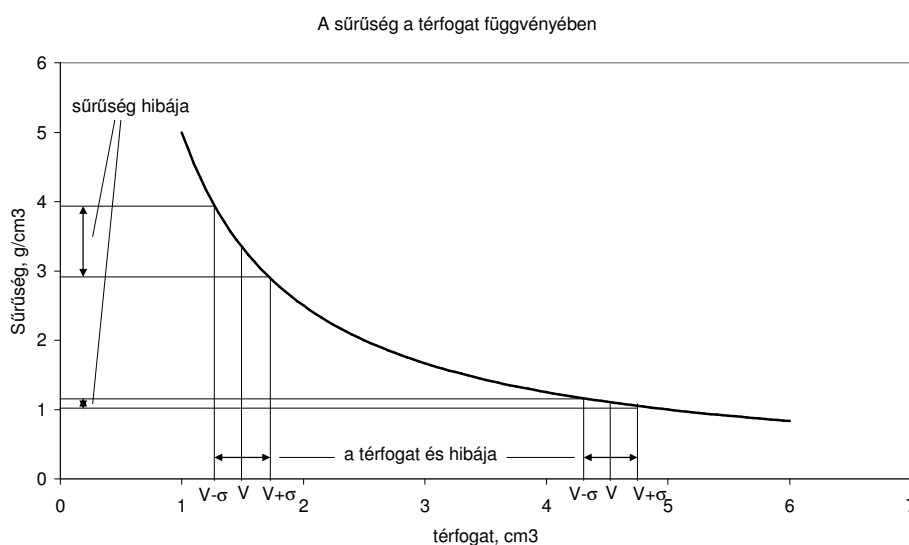
Ábrázoljuk a  $\rho$ -t az  $m$  és a  $V$  függvényében (1. és 2. ábra). Először a tömeg függvényében ábrázoljuk a sűrűséget, ilyenkor a térfogatot állandónak tekintjük. A  $\rho(m)$  függvény képe egy, az origóból kiinduló egyenes, amelynek különböző lehet a meredeksége az  $1/V$  értékétől függően. Ha például az  $m$  mért értéke az ábrán feltüntetett  $m$ -nél van, akkor az  $(m - \sigma; m + \sigma)$  intervallum mutatja a tömeg értékében a bizonytalanságot (átlag - átlag szórása, átlag + átlag szórása). Ezt átvetítve a függőleges tengelyre megkapjuk a sűrűség hibáját. Látható az 1. ábrán, hogy a sűrűségben annál nagyobb a hiba, minél nagyobb az egyenes meredeksége. Ezért ésszerűnek tűnik, hogy a tömegmérés hibáját megszorozzuk az egyenes meredekségével, és így megkapjuk a sűrűség hibájának azt a részét, amelyet a tömegmérés hibája okoz. Egy görbe meredeksége mindig a görbe differenciálhányadosával adható meg. Egyenes esetében a meredekség állandó, a példánkban  $1/V$ . Tehát a sűrűségnek a tömegmérés hibájából származó hibáját a következőképpen kapjuk meg:

$$\Delta\rho_m = \frac{1}{V} \Delta m,$$

ahol a  $\Delta m$  a tömegmérés hibája, amely az ábra alapján  $2\sigma$ .



1. ábra A számított sűrűség hibája hogyan függ a tömegmérés hibájától



2. ábra A számított sűrűség hibája hogyan függ a térfogatmérés hibájától

Most vizsgáljuk meg, milyen hibát ad a sűrűségben a térfogatméréssel elkövetett hiba. Ehhez készítsük el a térfogat–sűrűség grafikont (2. ábra), miközben a tömeget állandónak tekintjük. Az ábrán két különböző  $V$  értéket és a hozzá tartozó  $(V - \sigma; V + \sigma)$  intervallumot tüntettük fel. A térfogatmérés okozta bizonytalanságot átvétítve a függőleges tengelyre, kapjuk a sűrűség hibáját. Itt is megfigyelhető, hogy a sűrűségben a hiba nagysága a görbe meredekségétől függ, nagyobb meredekséghez nagyobb hiba tartozik. A  $\rho(V)$  függvény meredeksége változik, maga is függvény. Ezt a függvényt nevezik a differenciálhányados függvénynek (derivált függvény). A  $\rho = m \frac{1}{V}$  függvény differenciálhányadosa a  $V$ -szerint:  $-m \frac{1}{V^2}$ . (Ennek a meghatározását hamarosan megtanulják matematikában). Tehát a térfogatmérésből származó sűrűség hiba:

$$\Delta \rho_V = -m \frac{1}{V^2} \Delta V,$$

ahol a  $\Delta V$  a térfogat mérés hibája, amely az ábra alapján  $2\sigma$ .

A sűrűség teljes hibája:

$$\Delta \rho = \frac{1}{V} \Delta m + \left( -m \frac{1}{V^2} \right) \Delta V$$

Ez a képlet azt mutatja, ha a tömegmérés hibája nő, akkor a sűrűség hibája is nő, ha a térfogatmérés hibája nő, akkor a negatív előjel miatt a sűrűség hibája csökken. Előfordulhat, hogy a negatív előjelű tag abszolút értéke nagyobb, mint a pozitív előjelű tag abszolút értéke, és ekkor a sűrűség hibája negatív lesz. Ez nehezen értelmezhető, ezért bevezettek egy másik hiba fogalmat is: a felülről becsült maximális hibát, amelyet a fenti két hiba összetevő négyzetösszegéből vont négyzetgyökkel kaphatunk meg és biztosan mindig pozitív:

$$\Delta \rho = \sqrt{\left( \frac{1}{V} \right)^2 \Delta m^2 + \left( -m \frac{1}{V^2} \right)^2 \Delta V^2}.$$

Általánosan, ha  $f(x,y)$  olyan fizikai mennyiség, amelyet az  $x$  és  $y$  mért mennyiségekből határozunk meg, akkor az  $f$  hibája:

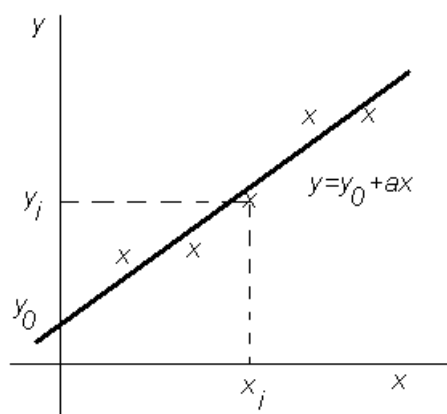
$$\Delta f = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y=\text{állandó}}^2 \Delta x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=\text{állandó}}^2 \Delta y^2}.$$

Itt a  $\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y=\text{állandó}}$ , ill. a  $\left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=\text{állandó}}$  az  $f(x,y)$  függvény ún. parciális differenciálhányadosai az  $x$ , ill. az  $y$  változók szerint. A parciális differenciálás azt jelenti, hogy ha valamely függvény több változótól függ, akkor csak az egyik változója szerinti görbe meredekséget határozzuk meg, a többi változót állandó értéken tartjuk.

## Regresszió számítás

Ha két fizikai mennyiség,  $x$  és  $y$  közötti függvénykapcsolatot vizsgáljuk, akkor használjuk a regresszió számítást. Ismerjük (vagy mérjük) az  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  értékeket és az egyes  $x$  értékekhez tartozó  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  értékeket. Ábrázoljuk az  $x$  függvényében az  $y$ -t, és keressük a

közöttük levő függvényt. A mérési gyakorlatokon csak első fokú függvénykapcsolatokat vizsgálunk. Későbbi tanulmányaikban más függvényekkel is megismerkednek.



3. ábra. Lineáris regresszió

Tételezzük fel, hogy az  $x$  és  $y$  mennyiségek között lineáris az összefüggés, és a pontokat legjobban közelítő egyenes az  $y = y_0 + ax$ . Keressük az egyenes  $a$  és  $y_0$  paramétereinek az értékét. Szélsőérték számítással megadható, hogy az egyenes meredeksége, az  $a$  értéke:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}$$

Az egyenes tengelymetszete pedig a következő összefüggéssel számítható:

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

ahol  $a$  a fenti kifejezés. A zsebszámológépek többsége tud kétváltozós statisztikai számításokat, illetve regresszió számítást is. Ilyen gépeknél elég csak az  $(x_i, y_i)$  pont párokat bevinni a gépbe és egy-egy gombnyomással megkapjuk  $y_0$ , ill.  $a$  értékét. A fizikában ügyelnünk kell arra, hogy a számokhoz mértékegység is tartozik. Például a tengelymetszet mértékegysége azonos a függő változó mértékegységével, az  $a$  meredekség, pedig a függő és független változó mértékegységének hányadosát viseli.

Hogy a mért pontok mennyire jól illeszkednek a számított egyenesre, azaz mennyire valóban lineáris összefüggés áll fenn a két mennyiség között, arra az ún. regressziós együttható értéke ad választ. Ha a regressziós együttható ( $r$ ) értéke majdnem 1, akkor jó az illeszkedés – valóban lineáris a két mennyiség között a kapcsolat, ha  $r$  értéke sokkal kisebb, mint 1, akkor „rossz” az illeszkedés – ilyenkor azt mondjuk, hogy a két mennyiség között nincs matematikai összefüggés. „ $r^2$ ” értékét úgy kapjuk meg, hogy az  $a$  értéket megszorozzuk annak a regressziós egyenesnek a meredekségével, amelyet úgy kapunk, hogy az  $x$  mennyiség függvényében ábrázoljuk az  $y$  mennyiségeket, és így illesztünk regressziós egyenest a mért pontokra. Ez a meredekség  $a'$ :

$$a' = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n}}$$

A keresett regressziós együttható:  $r = \sqrt{aa'}$

## 2.4 Hasznos megjegyzések

### Hibaszámításban használt fogalmak elnevezései

Néhány esetben megadjuk a kifejezés angol nevét is, mert zsebszámológépek, vagy számítógépes szoftverek gyakorta ezt használják.

**Mérhető mennyiség.** Lehet egy tárgy valamely fizikai jellemzője, de lehet elvont fizikai mennyiség is (például viszkozitás).

**Valódi érték.** A valódi érték semmilyen méréssel nem határozható meg pontosan. Azonban gondos mérési eljárással megközelíthető, vagy megbecsülhető.

**Konvencionális valódi érték.** Ez sem határozható meg pontosan, de nemzetközi egyezmények szerinti értékével számolunk. Például egységnyi (egy mólnyi) anyagmennyiségű vegyületben  $6,022\ 136\ 7 \times 10^{23}$  darab molekula van (Avogadro-szám).

**Helyes érték.** A mérési eredmények halmazából képezzük; általában azok átlaga, amelyet a feltárt rendszeres hiba értékével helyesbítettünk.

**Rendszeres hiba.** A rendszeres hiba következetesen minden mérési eredményt azonos mértékben torzít. A rendszeres hibát általában meg tudjuk határozni, és az eredményt képesek vagyunk korrigálni. Erre példákat is mutatunk.

**Véletlen hiba.** A véletlen hibának sem nagysága, sem előjele nem határozható meg. Ha a mérést többször is elvégezzük (megismételjük), biztonságosabb becslést kapunk az eredményre.

**Pontosság** (accuracy). Megadja, hogy a mérési eredmény mennyire van közel a valódi értékhez. Mint említettük, a valódi érték nem ismerhető meg.

**Precizitás** (precision). Megadja, hogy a mérési eredményt mekkora mérési bizonytalansággal ismertük meg. Nagyságát általában az eredmények szórása alapján becsüljük.

**Hiba** (error of measurement). A mérési hiba egyenlő a mérési eredmény mínusz a valódi érték. A valódi értéket természetesen nem ismerjük. Ezért a hiba becslését javasoljuk úgy számítani, hogy a mérési eredményből a helyes értéket (például az átlagot) vonjuk ki. Ennek értelmében pozitív a hiba, ha a mérési eredmény nagyobb, mint a helyes érték.

**Relatív hiba** (relative error). A relatív hiba értékét megkapjuk, ha a mérési hiba értékét elosztjuk a valódi értékkel (ennek hiányában a helyes értékkel).

**Mérési bizonytalanság** (uncertainty of measurement). Kifejezi azt, hogy a mérési eredmény körül milyen értékészletű tartományban feltételezhetjük annak előfordulását. Az elsőéves méréseknél megelégszünk azzal, hogy a mérési bizonytalanságot a szórás alapján becsüljük



meg. Nagyon egyszerűen fogalmazva: az átlag körüli szórást tekintjük mérési bizonytalanságnak. Mutatószereknél a mérési bizonytalanság becslésére – ha erre más eszköz nem áll rendelkezésünkre – felhasználhatjuk a műszer skálaosztásának értékét (amelynél kisebb változás kijelzésére a műszer nem képes).

**Átlag** (számtani középérték, average). Kiszámításához összegezzük valamennyi mérési

eredményt, és ezt az összeget elosztjuk a mérések számával ( $n$ ).  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

**Szórás** (tapasztalati szórás, experimental standard deviation). Kifejezi azt, hogy milyen tartományban szóródnak a mérési eredmények. Kiszámításához nem kell feltételeznünk, hogy milyen típusú az adatok szóródása. Számításához fel kell használjunk az átlagot. Ez a magyarázata annak, hogy a nevezőben a kísérletek számánál eggyel kisebb szám áll. Ez a szabadsági fok ( $n-1$ ).

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

**Az átlag tapasztalati szórása** (experimental standard deviation of the mean). Az átlag eloszlását jellemző szórás becslése. Annak kifejezésére használjuk, hogy mennyi mérést végeztünk, annál megbízhatóbb az átlag becslése:

$$\frac{s}{\sqrt{n}} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

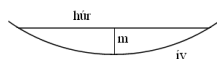
Ez a statisztikai mérőszám két eltérő értelemben is használatos. Ha több mérési sorozatot végzünk, akkor az egyes sorozatokban kapott átlagok a valódi érték körül „szórnak”. Korábban több átlagra hivatkoztunk; ezt a biometriában használják. De használjuk abban az értelemben is, hogy minél több mérést végzünk, annál megbízhatóbb az átlag becslése. Az átlag tapasztalati szórásának egyetlen adathalmazra kell vonatkoznia. Ez azt jelenti, hogy azonos adathalmazból különféle módszerekkel ragadhatunk ki részhalmazokat. Ezek átlagának elvileg azonosnak kellene lennie, de különféle okokból azok mégis ingadoznak az egész halmaz átlaga körül.

Szokásos, de nem szabályos rá hivatkozni „az átlag középhibája” (standard error, SE) néven.

### Rendszeres hiba becslésére példák

A rendszeres hiba becslésére különféle eljárások használhatóak. Bemutatunk néhány példát arra az esetre, ha ismerjük az okokat, amelyek miatt torzított mérési eredményeket kapunk; és ezt méréssel, vagy számítással meg is tudjuk határozni.

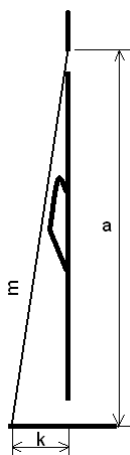
Az első példánkban bemutatjuk, mekkora hibát okozhat egy mérőszalag meghajlása (belógása), amelyet véges merevsége miatt a saját súlya hoz létre.



4. ábra. Mérőszalag behajlása

A feladat: mérőszalaggal megmérni két pont távolságát, amely várhatóan három méter. Az acél mérőszalag belógását  $m$  betű jelzi (4. ábra). Geometriai szempontból feltételezzük, hogy a mérőszalag körvonalban hajlik meg. A húr hossza ekkor a mérendő távolságot képviseli, a

mérőszalagot pedig a körív hossza. Ha a kör sugara 20 méter a mérendő távolság (a húr) 3 méter, akkor az  $m$  belógás Pitagorasz tételéből:  $m = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{\text{húr}}{2}\right)^2} = 20 - \sqrt{20^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 0,056329$  m. A hozzá tartozó szög felének szinusza  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\text{húr}/2}{r} = \frac{1,5}{20} = 0,07507$  rad, (4,301 fok). A teljes szög ennek kétszerese; 0,15014 rad, ebből az ívhossz  $\overset{\frown}{i}v = \alpha r = 0,15014 \cdot 20 = 3,0028$  méter. Az ívhossz és a húr különbsége  $3,0028 \text{ m} - 3 \text{ m} = 0,0028$  m. A mérőszalag tehát ezeket a távolságokat következetesen 2,8 mm-rel hosszabbnak méri.



5. ábra. Ajtónyílás mérése

A következő ábrával (5.ábra) szemléltetjük a rendszeres hibát és a korrekció egy lehetőségét. Egy ajtónyílás függőleges méretét kellene megmérnünk. Az ajtónyílásban egy kiemelkedő darab gátolja a mérés szabad elvégzését. Ezért kijelöltünk a küszöbön egy jól rögzíthető részt, és annak magasságát mérjük meg a szemöldökfához képest. Mekkora hibát követünk el? Az ábrán  $a$  az ajtónyílás mérete,  $k$  a küszöb széle,  $m$  az akadálytalanul mérhető távolság a szemöldökfa és a küszöb között. Legyen  $a = 3,2$  m,  $k = 0,3$  m. Az  $a$  és  $m$  által bezárt szög annyira kicsi, hogy nem is ábrázolható. Értéke:

$$\alpha = \arctg \frac{k}{a} = \arctg \frac{0,3}{3,2} = \arctg 0,09375 = 5,3 \text{ fok} = 0,09347 \text{ rad.}$$

Az  $m$  mérhető magasság számítását végezzük ezért inkább Püthagorasz tétele alapján:  $m = \sqrt{a^2 + k^2} = \sqrt{3,2^2 + 0,3^2} = 3,214$ . Ha tehát ferdén mérjük az ajtónyílás méretét, akkor minden mérésünknél 14 mm-t tévedünk. Ezért valamennyi eredményből le kell vonnunk 14 mm-t.

## Regressziós együtthatók kiszámítása másképpen

### A regressziós együtthatók:

A fentiekben a regressziós egyenes meredekségét,  $a$ -t és a tengelymetszeti tagját,  $y_0$ -t a következő összefüggésekkel számítottuk ki:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}} \quad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - a \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Ugyanezeket a számításokat más módon, lépésről-lépésre is elvégezhetjük. Így kisebb a tévedés esélye. Legyen a két változó átlaga és szórásnégyzete rendre

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$	$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	$s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$
--	--	--	--

kovarianciája  $m = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

korrelációs együtthatója  $\rho = \frac{m}{s_x s_y}$  ez eddig azért jó, mert szimmetrikus; nem téveszthetjük össze a két változót. Már csak a regressziós együtthatóra kell vigyáznunk – melyiknek a szórása kerül a számlálóba, illetve a nevezőbe:  $a = \rho \frac{s_x}{s_y}$ . Itt  $x$  a független változó és  $y$  a függvény érték.

### Tudományos és technikai kifejezések és ábrázolások törvényei

A hallgatói gyakorlatok eredményének közlése, számítása és kiértékelése tekintetében alkalmazni kell az erre vonatkozó hazai előírásokat; szabványokat és törvényeket:

MSz 4900 Fizikai mennyiségek neve és jele

1991. évi XLV. Törvény. A mérésügyről [A végrehajtásáról szóló 127/1991. (X. 9.) Korm. rendelettel egységes szerkezetben.]

Műszaki grafikus ábrázolás: MSz ISO 10209 Műszaki dokumentáció, MSz EN ISO 5456 Műszaki rajzok, MSZ 1701/3-82 Szakgrafika. Diagramok

Az itt említett javaslatokra és előírásokra mintákat közlünk a laboratóriumi mérések leírásánál

*Diagram: Mennyiségi összefüggéseket, arányokat szemléltető ábrázolás*

*Grafikon: Egymással valamilyen kapcsolatban levő tényező változó értékeinek összefüggéseit koordinátarendszerben ábrázoló görbe*

*Nomogram: grafikus számítási eszköz valamely függvény, vagy egyenlet megoldására (Maurice d'Ocagne. Sur quelques principes élémentaires de nomographie. Bull. Sci. Math., illetve M. J. Massau, 1889.)*

*Sankey-diagram energia- vagy anyagáram ábrázolására (Matthew Henry Phineas Riall Sankey neve után)*

### Hasznos internet címek mérésügyi problémákhoz, mérések kiértékeléséhez:

Magyarországon mérésügy:

**www.mkeh.gov.hu**

**MKEH** - Magyar Kereskedelmi Engedélyezési Hivatal (az Országos Mérésügyi Hivatal jogutódja, Budapest), Hungarian Trade Licensing Office

Külföldön mérésügy:

**www.bipm.org**

**BIPM** - Bureau internationale des poids et mesures, Franciaország, Sèvres  
(Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatal)

**www.nist.gov**

**NIST** - National Institute of Standards and Technology, Amerikai Egyesült Államok,  
Gaithersburg, Maryland (Országos Műszaki és Szabványügyi Intézet)

**www.npl.co.uk**

**NPL** - National Physical Laboratory, Egyesült Királyság, Teddington, Middlesex  
(Országos Fizikai Laboratórium)

**www.oiml.org**

International Organization of Legal Metrology

Olyan nemzetközi szervezetek, amelyek célul tűzték ki a mérések és azok kiértékelésének egységesítését:

[www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm/](http://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm/)

**JCGM** - Joint Committee for Guides in Metrology (Mérésügyi interdiszciplináris társult bizottság)

**GUM** - "Guide to the expression of uncertainty in measurement" című kiadvány magyar változata. 1995, Budapest, 132 oldal, a kiadásért felelős: dr. Pákay Péter, az OMH elnöke.

**VIM** Vocabulaire internationale de métrologie - Nemzetközi mérésügyi szótár

**www.iupac.org**

**IUPAC** - International Union of Pure and Applied Chemistry: Manual of Symbols and Terminology for Physicochemical Quantities and Units (**Green Book**)

[www.iupap.org](http://www.iupap.org)

**IUPAP** - International Union of Pure and Applied Physics

### 3. Sűrűségmérés

#### 3.1. Szilárd test sűrűségének mérése

A sűrűség,  $\rho$ , definíciója homogén test esetén: a test  $m$  tömege osztva a test  $V$  térfogatával:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

A sűrűség SI mértékegysége

$$\text{kg/m}^3,$$

használatos még a

$$\text{kg/dm}^3, \text{ kg/l és a g/cm}^3, \text{ g/ml}$$

Az átszámítás az egyes mértékegységek között:

$$\begin{array}{l} 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{l}} \\ 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = \frac{10^3 \text{g}}{10^3 \text{cm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{ml}} \\ 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = \frac{1 \text{kg}}{10^{-3} \text{m}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{array}, \quad \text{ill.} \quad \begin{array}{l} 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{1 \text{kg}}{10^3 \text{dm}^3} = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \\ 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10^{-3} \frac{10^3 \text{g}}{10^3 \text{cm}^3} = 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{ml}} \\ 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{10^{-3} \text{kg}}{10^{-6} \text{m}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{array}$$

Nem homogén testnél az  $m/V$  hányados a test átlagsűrűségét adja meg.

A sűrűség értéke függ a hőmérséklettől és a nyomástól. Gondos méréseknél mindig meg kell adni a hőmérséklet és a nyomás értékét. Ugyanakkor, ha ismert ezek hatása, alkalmazhatunk hőmérsékleti, illetve nyomás szerinti korrekciót is.

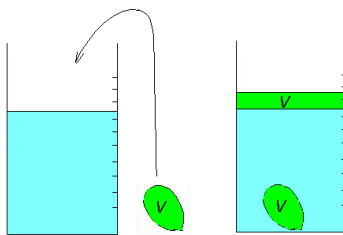
Példák a sűrűség értékekre normál nyomáson (101325 Pa)

név	sűrűség, kg/m <sup>3</sup>
levegő	1,2928 ( 0°C)
víz	999,868 ( 0°C)
etil-alkohol	789 (18°C)
fenyőfa	350-600 (18°C)
üveg	2400-3400 (18°C)
réz	8920 (18°C)
alma	710-890 (18°C)
burgonya	1150 (18°C)

#### Sűrűség meghatározása tömeg és térfogat méréssel

Bármilyen anyagnál alkalmazható módszer. Gázok és folyadékok esetén egy adott térfogatú edény tömegét megmérjük üresen és megmérjük a mérendő anyaggal teletöltve, ebből a két tömegből és az edény térfogatából a keresett sűrűség meghatározható. A szabályos alakú szilárd testeknél a térfogat számítható. A szabálytalan alakú szilárd testeknél a térfogat egyszerűen meghatározható vízkiszorítás módszerével, ha a test anyaga nem oldódik vízben. Zöldségek és gyümölcsök sűrűségének meghatározásához megmérjük a tömeget egy mérleggel. A térfogatot úgy mérjük meg, hogy egy beosztással ellátott mérőhengerbe adott

jelig desztillált vizet öntünk. A mérendő sűrűségű anyagot behelyezzük a mérőhengerbe és leolvassuk a vízszint emelkedését (6.ábra).



6. ábra Szilárd anyag térfogtmérése vízkiszorítás módszerével

### A mérés menete

#### a.) Egy zöldség szelet esetén

Egy burgonya, vagy répaszelet  $m$  tömegét megmérjük táramérleggel, vagy digitális mérleggel. Ezután vizet öntünk egy 100 ml-s, vagy 250 ml-s mérőhengerbe. Leolvassuk a vízszint értékét. Beletesszük a vízbe a szeletet, és újra leolvassuk a vízszint értékét. A két vízszint közötti térfogat a mérendő szelet  $V$  térfogata. A tömeg és térfogat hányadosa adja a sűrűséget. Többször (legalább háromszor) mérjük meg egyetlen szelet térfogatát, ill. tömegét. A térfogat háromszori méréséhez mindig újra töltjük a mérőhengert vízzel, leolvassuk a vízszintet, és a szelet behelyezésével megállapítjuk az új vízszint értékét.

A három ( $n=3$ ) mérésből először kiszámítjuk a térfogat és a tömeg átlagértékét, szórását és az átlagok szórását:

$$\bar{V} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3} \quad \bar{m} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3}$$

$$s_V = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (V_i - \bar{V})^2}{3-1}} \quad s_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (m_i - \bar{m})^2}{3-1}}$$

$$\sigma_{\bar{V}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (V_i - \bar{V})^2}{3(3-1)}} \quad \sigma_{\bar{m}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (m_i - \bar{m})^2}{3(3-1)}}$$

Majd megadjuk a szelet sűrűségét a  $\rho = \frac{\bar{m}}{\bar{V}}$  hányadossal.

Ezután meghatározzuk a szelet sűrűségének hibáját - a hibaterjedés törvénye alapján:

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{V}}\right)^2 \Delta m^2 + \left(-\bar{m} \frac{1}{\bar{V}^2}\right)^2 \Delta V^2},$$

ill.

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{V}}\right)^2 s_m^2 + \left(-\bar{m} \frac{1}{\bar{V}^2}\right)^2 s_V^2}$$

a  $\Delta m = s_m$  és  $\Delta V = s_V$ , a tömegmérés és a térfogtmérés hibájának felhasználásával.

A három térfogat és a három tömeg értékből számíthatunk három sűrűség értéket. Ezek átlag értékét érdemes összehasonlítani az átlag tömeg és az átlag térfogat hányadosával.

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1}, \quad \rho_2 = \frac{m_2}{V_2}, \quad \rho_3 = \frac{m_3}{V_3} \quad \text{és} \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{3}$$

$\rho$ ?  $\bar{\rho}$

Vajon milyen jel áll az átlag sűrűség és az átlagokból számított sűrűség között?

A három sűrűségből kiszámítjuk az átlagot, a szórást, az átlag szórását és összehasonlítjuk a sűrűség szórását a hibaterjedés alapján számolt sűrűség hibával!

$$s_{\rho} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (\rho_i - \bar{\rho})^2}{3-1}}, \quad \sigma_{\bar{\rho}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (\rho_i - \bar{\rho})^2}{3-1}}$$

$\Delta\rho$ ?  $\sigma_{\bar{\rho}}$  A kérdőjel helyére írjuk be a megfelelő jelet.

b.) *több zöldség szelet esetén*

A kiadott burgonyából, vagy sárgarépből három szeletet vágunk le. Az egyes szeletek tömegét mérleggel, térfogatát mérőhengerben vízkiszorítás módszerével megmérjük. A három térfogat és a három tömeg értékből három sűrűség értéket számítunk:

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1}, \quad \rho_2 = \frac{m_2}{V_2}, \quad \rho_3 = \frac{m_3}{V_3}$$

és átlag sűrűséget  $\bar{\rho} = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{3}$ , valamint a sűrűség szórását és átlag szórását, az

előbbiekhöz hasonlóan.

Ebben az esetben a tömegmérés és a térfogatmérés hibáját a mérőeszköz leolvasási pontossága adja meg. Ha például a mérleg 0,1 g pontossággal, a mérőhengeren a beosztás 1 ml pontosságú, akkor a tömegmérés hibáját 0,067 g értéknek, a térfogatmérés hibáját 0,67 ml értéknek vehetjük. (Későbbi biometriai tanulmányaikban megtanulják, hogy milyen elvi megfontolás alapján). Ily módon hibaterjedést is lehet számítani.

### **Feladatok**

A kiadott zöldség vagy gyümölcs sűrűségének meghatározása tömeg és térfogat mérésével.

*Egy szelet esetén:*

Háromszor mérjük meg a szelet tömegét és térfogatát. Határozzuk meg az átlagokat, a szórásokat és az átlagok szórásait!

Számítsuk ki a sűrűséget a tömeg és térfogat átlagából, adjuk meg a sűrűség hibáját a hibaterjedés törvénye alapján!

Számítsunk három sűrűséget a három térfogat és három tömeg értékkel, majd számítsuk ki az átlag sűrűséget és a sűrűség szórását!

Hasonlítsuk össze a kétféle módon számított sűrűséget! Hasonlítsuk össze a sűrűség hibáját a sűrűség szórásával!

*Több zöldség szelet esetén:*

Mérjük meg minden darab tömegét és térfogatát!

Számoljuk ki minden darab sűrűségét!

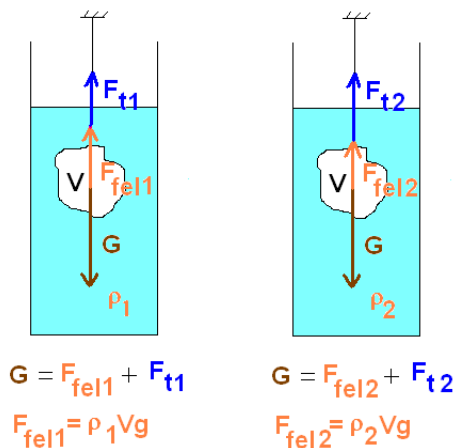
Számítsuk ki a sűrűségek átlagát, szórását és átlag szórását!

Határozzuk meg a sűrűség hibáját a hibaterjedés alapján a tömegmérés és térfogatmérés pontosságának ismeretében!

Hasonlítsuk össze a sűrűség átlag szórását a hibaterjedés alapján kapott sűrűség hibával!

## Sűrűség meghatározása Archimédész törvénye alapján

Egy szabálytalan alakú test  $V$  térfogatának és  $\rho$  sűrűségének meghatározásakor eljárhatunk a következőképpen: a testet egy  $\rho_1 < \rho$  sűrűségű folyadékba merítve a test megtartásához szükséges erő  $F_{t1}$ , egy  $\rho_2 < \rho$  sűrűségű folyadékban, pedig  $F_{t2}$  (7. ábra).



7. ábra. Úszó test egyensúlya

Mind a két folyadékban a súlyerő egyensúlyt tart a felhajtó erő ( $F_{fel}$ ) és a tartó erő ( $F_t$ ) összegével:

$$G = F_{fel1} + F_{t1} \text{ és } G = F_{fel2} + F_{t2}.$$

Felhasználva, hogy a felhajtó erő mindkét esetben a kiszorított folyadék súlyával egyenlő:

$$F_{fel1} = \rho_1 V g \text{ és } F_{fel2} = \rho_2 V g.$$

Béírva a felhajtó erők kifejezését a fenti összefüggésekbe, kapjuk, hogy:

$$G = \rho_1 V g + F_{t1} \text{ és } G = \rho_2 V g + F_{t2}.$$

Mivel a baloldalak megegyeznek, ezért a jobb oldalak is egyenlők egymással:

$$\rho_1 V g + F_{t1} = \rho_2 V g + F_{t2}.$$

Ebből az egyenletből  $V$ -t kifejezve:

$$V = \frac{F_{t2} - F_{t1}}{(\rho_1 - \rho_2)g}.$$

Tehát ismerve a két sűrűséget és mérve a két tartó erőt, a szilárd test térfogata meghatározható.

Ha a test súlyát,  $G$ -t a térfogatával ( $V$ ), sűrűségével ( $\rho$ ) és a nehézségi gyorsulással ( $g$ ) írjuk fel:

$$\rho V g = \rho_1 V g + F_{t1} \text{ és } \rho V g = \rho_2 V g + F_{t2}.$$

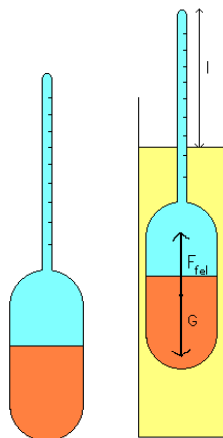
Mind a két összefüggésből kifejezzük a  $V$ -t, egyenlővé tesszük a két kifejezést és megkapjuk a test sűrűségét:

$$\rho = \frac{F_{t1}\rho_2 - F_{t2}\rho_1}{F_{t1} - F_{t2}}.$$



### 3.2. Folyadék sűrűségének mérése Archimédész törvénye alapján (Areométer)

Az areométer (úszó sűrűségmérő) nehezékkel, esetleg még hőmérővel is ellátott, üvegből készült test (8. ábra), amelynek az alsó része szélesebb, a felső része egy keskeny, skálával ellátott cső.



8. ábra Areométer és folyadék sűrűségének mérése areométerrel

Ha folyadékba merülve az areométer úszik, akkor az areométerre ható felhajtó erő ( $F_{fel}$ ) éppen megegyezik a test  $G$  súlyával. Ha az areométer térfogata  $V_a$ , átlagos sűrűsége  $\rho_a$ , valamint az areométer folyadékba merülő térfogatrésze  $V_a'$ , akkor a felhajtó erő – a kiszorított folyadék súlya

$$F_{fel} = \rho_{folyadék} V_a' g$$

ahol  $\rho_{folyadék}$  a folyadék sűrűsége, és az areométer súlya pedig

$$G = \rho_a V_a g ,$$

Ezek nyugalmi állapotban egyenlők egymással

$$F_{fel} = G , \text{ ill. } \rho_{folyadék} V_a' g = \rho_a V_a g$$

Ha a felső üvegcső keresztmetszete  $A$ , és  $l$  hosszúságú darab áll ki a folyadékból, akkor  $V_a' = V_a - Al$  kifejezést beírva a fenti összefüggésbe és  $\rho_{folyadék}$ -t kifejezve

$$\rho_{folyadék} = \rho_a \frac{V_a}{V_a - lA} = \rho_a \frac{1}{1 - l \left( \frac{A}{V_a} \right)}$$

Ebben a kifejezésben a folyadék sűrűsége és a kiálló hossz között egyértelmű matematikai összefüggés van. Ez a matematikai függvény egyszerűsíthető, ha az  $l \left( \frac{A}{V_a} \right)$  mennyiség elég kicsi. Hitelesítéssel meghatározható, hogy a különböző sűrűségű folyadékokhoz milyen  $l$ , azaz milyen osztás tartozik. Ha az osztást sűrűségre kalibrálják, akkor a bemerülés mélységéből rögtön a sűrűség olvasható le. A skálát lehet szeszfokra, tej százalékos zsírtartalomra, stb. kalibrálni.

#### Sóoldat sűrűségének meghatározása areométerrel

Az oldatot 250 ml-s mérőhengerbe öntjük, behelyezzük az areométert, és leolvassuk az oldat sűrűségét. Ha különböző koncentrációjú sóoldatok sűrűségét megmérjük, akkor meghatározhatjuk a  $\rho(C)$  függvényt, azaz hogyan függ a sűrűség az oldat koncentrációjától,

C-től. Kis koncentrációtartományban a sűrűség és a koncentráció között az összefüggés lineáris:

$$\rho = \rho_0 + aC$$

$\rho_0$  és  $a$  konstansok.

Az ismeretlen koncentrációt a sűrűség ismeretében a következőképpen határozhatjuk meg. Megmérjük az oldat sűrűségét,  $\rho_x$ -t. Beírva a fenti egyenletbe:

$$\rho_x = \rho_0 + aC_x,$$

kifejezzük  $C_x$ -t:

$$C_x = \frac{\rho_x - \rho_0}{a}.$$

### A mérés menete

Négy különböző koncentrációjú sóoldat sűrűségét megmérjük, a nulla koncentrációjú oldat sűrűsége a víz sűrűsége az adott hőmérsékleten. Az összetartozó érték párokat grafikonon ábrázoljuk; a vízszintes tengelyen a koncentrációt, a függőlegesen a sűrűséget. Lineáris regresszió segítségével meghatározzuk az egyenes paramétereit:  $\rho_0$  és  $a$ -t. Az ismeretlen koncentrációjú oldat sűrűségét is megmérjük.  $\rho_0$  és  $a$  konstansok ismeretében kiszámítjuk az ismeretlen koncentrációt.

### Feladatok

Határozzuk meg a kiadott oldatok sűrűségét areométerrel!

Az adatokat foglaljuk táblázatba!

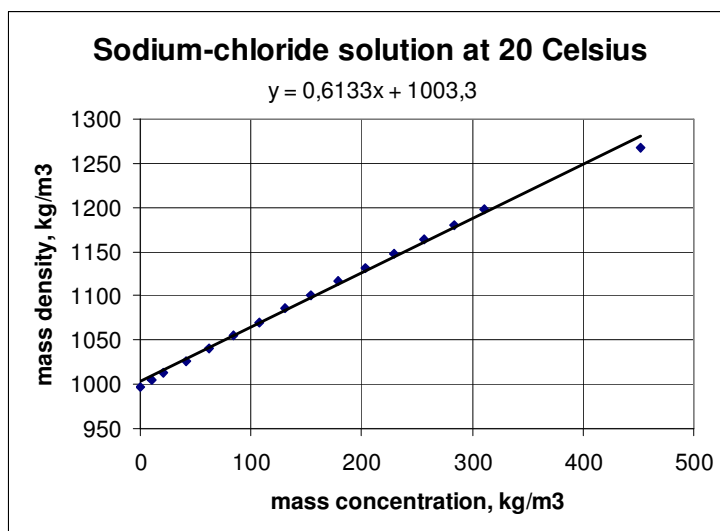
Az oldatok koncentrációját adjuk meg g/l, kg/m<sup>3</sup>, mól/l mértékegységekben! A só (NaCl) molekulatömege: 58,44 g/mol.

Ábrázoljuk a sűrűség értékeket a koncentráció függvényében!

Illesszünk regressziós egyenest az öt pontra!

Határozzuk meg a regressziós egyenes konstansait, majd ezekkel számítsuk ki az ismeretlen koncentrációt!

Az eredményt a következő grafikonhoz hasonlóan kell ábrázolni.

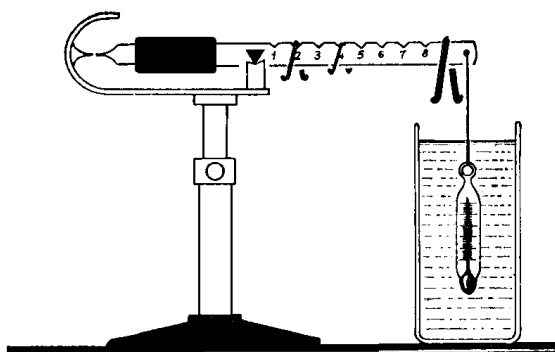


9. ábra. Sóoldat összetételi arányának és sűrűségének összefüggése

### 3.3. Folyadék sűrűségének mérése Mohr–Westphal mérleggel

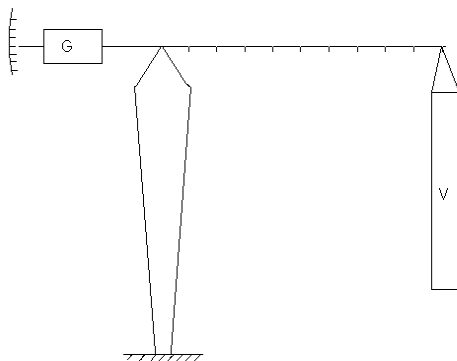
A Mohr–Westphal mérleg egyfajta speciális mérleg, amelyen egy  $G$  súly tart egyensúlyt levegőben egy  $V$  térfogatú üvegtessel. A mérleg egyik karja hosszú és tíz egységre van osztva (10. ábra), ennek a végén helyezkedik el az üvegtest. Ha az üvegtest folyadékba merül, akkor az egyensúly felbomlik, mivel az üvegtestre felhajtó erő hat (11. a ill. b ábra). Amennyiben  $20^{\circ}\text{C}$ -s desztillált vízbe merül az üvegtest, akkor az egyensúlyt helyre lehet állítani az  $l$  hosszúságú mérlegkar 10-ik osztására helyezett U-alakú  $L$  „lovassal”, amelynek súlya egyenlő a  $20^{\circ}\text{C}$  hőmérsékletű,  $V$  térfogatú desztillált víz súlyával. A lovas súlya lefelé hat, a felhajtó erő felfelé hat az  $l$  hosszúságú mérlegkar végén a 10-ik osztásnál.

Megjegyzés: a víz sűrűségének közismert értéke  $4^{\circ}\text{C}$ -ra vonatkozik. A laboratóriumi eszközöket viszont szobahőmérsékletre, – a használati hőmérsékletre – szokás hitelesíteni.

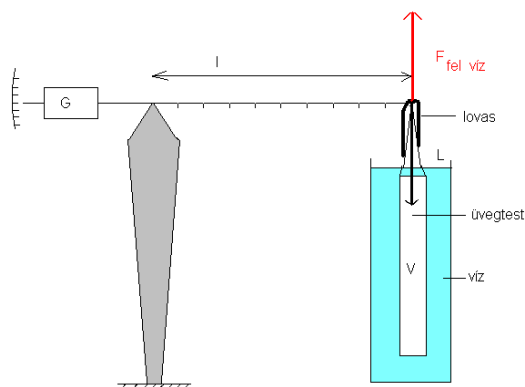


10. ábra. A Mohr–Westphal-mérleg képe

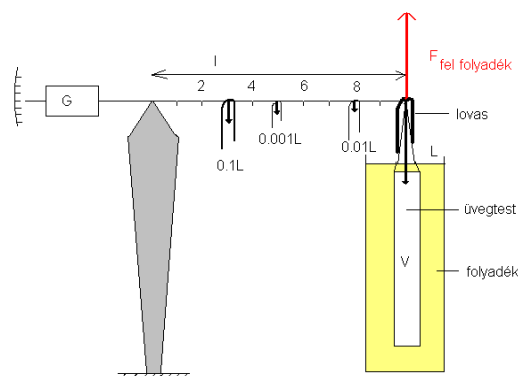
Ha az üvegtest a víz sűrűségénél nagyobb sűrűségű folyadékba merül, akkor a felhajtó erő is nagyobb lesz (11. b ábra). A mérleghez tartozik egy speciális súlysorozat: az  $L$  súlyú lovas  $0.1$ ,  $0.01$  és  $0.001$  súlyának megfelelő súlyú lovas.:  $0.1L$ ,  $0.01L$  és  $0.001L$ . Ezeket a mérlegkar különböző osztásaira helyezve visszaállítjuk az egyensúlyt. Ilyenkor a felhajtó erő meghatározásához fel kell írni a mérlegkarra ható forgatónyomatékokat. Felfelé forgat a felhajtóerő, lefelé forgatnak a lovasok. A 11. b ábrán például az  $L$  lovas forgató karja a mérlegkar teljes  $l$  hossza, a  $0.1L$  lovas karja  $0.3l$ , a  $0.01L$  lovas karja  $0.8l$  és a  $0.001L$  lovas karja  $0.5l$ .



11. ábra Mohr–Westphal-féle mérleg. Egyensúly levegőben.



11. a ábra  
Egyensúly vízben



11. b ábra  
Egyensúly folyadékban

$$\text{A felhajtó erők: } F_{\text{felvíz}} = \rho_{\text{víz}} Vg \quad F_{\text{fefolyadék}} = \rho_{\text{folyadék}} Vg$$

A forgatónyomatékok a 11.a és b ábrán szemléltetett példa esetén

$$F_{\text{felvíz}} l = Ll \quad F_{\text{fefolyadék}} l = Ll + 0.1L0.3l + 0.01L0.8l + 0.001L0.5l$$

Egyszerűsítve  $l$ -lel megkapjuk a felhajtó erők értékét az „ $L$ ”-lel kifejezve:

$$F_{\text{felvíz}} = L \quad F_{\text{fefolyadék}} = L1.0385$$

Beírva a felhajtó erők kifejezését, azaz a kiszorított víz súlyát, ill. a kiszorított folyadék súlyát, kapjuk, hogy

$$L = \rho_{\text{víz}} Vg \quad 1.0385L = \rho_{\text{folyadék}} Vg$$

Elosztva egymással ezt a két kifejezést és egyszerűsítve  $L$ -lel,  $g$ -vel és  $V$ -vel

$$1.0385 = \frac{\rho_{\text{folyadék}}}{\rho_{\text{víz}}}$$

és kapjuk, hogy

$$\rho_{\text{folyadék}} = 1.0385\rho_{\text{víz}}$$

Tehát a folyadék sűrűségét úgy kapjuk meg, hogy a víz sűrűségét megszorozzuk a folyadékban fellépő felhajtó erő kiegyensúlyozásakor a lovasok helyének megfelelő számmal. A Mohr–Westphal mérleggel a mérés úgy történik, hogy először kiegyensúlyozzuk a desztillált vízben, majd a mérendő sűrűségű folyadékban a felhajtó erőt a lovasokkal. Ezután a lovasok helyéből leolvasható, hogy mennyivel kell a víz sűrűségét megszorozni, hogy megkapjuk a folyadék sűrűségét. Ha a mérendő sűrűség nagyobb, mint  $1.1\rho_{\text{víz}}$ , akkor a kiegyensúlyozáshoz még egy, vagy több  $L$  súlyú lovas lehet használni. Ha a desztillált víz nem  $20^\circ\text{C}$ -s, akkor a benne fellépő felhajtó erő sem pontosan  $L$ . Ilyenkor a vízben fellépő felhajtó erőt is az összes lovas felhasználásával egyensúlyozzuk ki, és a folyadék sűrűségét úgy kapjuk meg, hogy a víz aktuális sűrűségét két négyjegyű szám hányadosával szorozzuk meg.

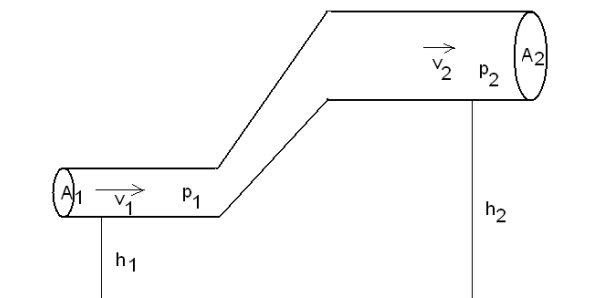
### 3.4. Folyadék sűrűségének mérése Bernoulli törvénye alapján

Bernoulli törvénye értelmében az ideális közeg (összenyomhatatlan gáz vagy folyadék) stacionárius, veszteségmentes (súrlódás nélküli) áramlására igaz a következő összefüggés

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 + p_1 \frac{m}{\rho} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 + p_2 \frac{m}{\rho}$$

Ez az összefüggés az energia megmaradás törvényét adja áramló közegekre:  $p$  a sztatikus nyomás,  $v$  a közeg sebessége,  $m$  a közeg tömege,  $\rho$  a közeg sűrűsége,  $h$  egy választott vonatkoztatási szinthez képest mért magasság és  $g$  a nehézségi gyorsulás (12. ábra).

A 12. ábra különböző keresztmetszetű és különböző magasságban elhelyezkedő csőszakaszokban történő áramlást szemléltet.



12. ábra Két különböző csőszakasz egy áramlásnál, Bernoulli törvényéhez

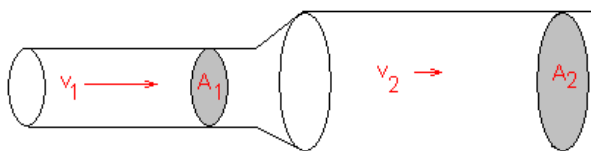
Szokás még egységnyi térfogatra felírni a Bernoulli egyenletet ( $\frac{m}{V} = \rho$  alapján):

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + p_2$$

Mindegyik tag nyomás mértékegységű:  $\frac{1}{2}\rho v^2$  az ún. torló nyomás,  $\rho gh$  a hidrosztatikai nyomás és  $p$  a sztatikus nyomás.

Kísérleti összeállításunkban vízszintes levegő áramot állítunk elő porszívó és vízszugár légszivattyú segítségével. Mivel a légáram vízszintes, ezért a  $h$  értéke mindenütt azonos, és így  $h_1 = h_2$ , tehát az egyenlet két oldalán szereplő két  $h$ -t tartalmazó tag szintén egyenlő, ezért elhagyható:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

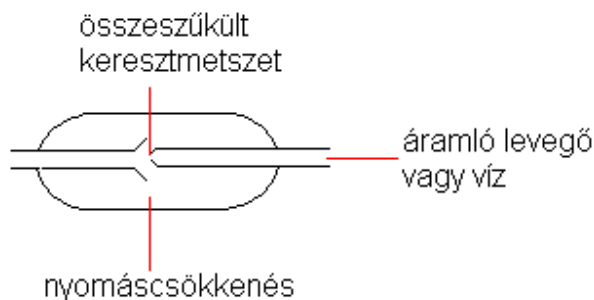


13. ábra Áramlási cső  $A_1$  és  $A_2$  keresztmetszettel, ill.  $v_1$  és  $v_2$  sebességgel

Stacionárius áramló közegekre érvényes a **folytonossági tétel**, vagy a **kontinuitási tétel**

$$A_1 v_1 = A_2 v_2,$$

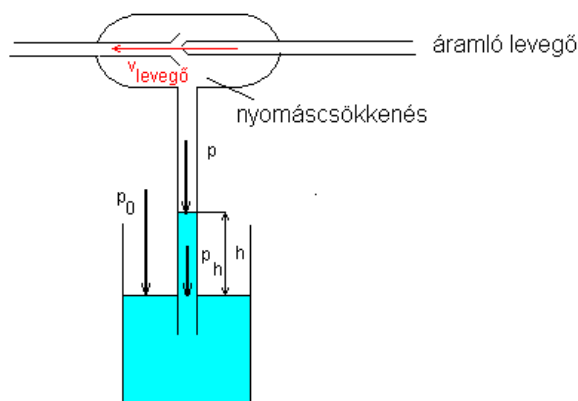
ahol az  $A_1$  keresztmetszetenél az áramló közeg sebessége  $v_1$ ,  $A_2$  keresztmetszetenél a közeg sebessége  $v_2$ .



14. ábra Vízszugár légszivattyú

Kísérleti összeállításunknál levegő áramot hozunk létre porszívóval. A légáramot egy vízszugár légszivattyún (14. ábra) engedjük át. A szivattyú szűk keresztmetszetében a levegő sebessége nagyon megnő, és ekkor a statikus nyomás csökken. Ha az alacsony nyomású térhez egy üvegcsővel csatlakozunk (15. ábra), amelynek az alja egy folyadékot tartalmazó edényben áll, akkor a folyadék felemelkedik a csőben  $h$  magasságra. Ilyenkor a folyadék  $p_h$  hidrosztatikai nyomásának és a csőben levő levegő  $p$  statikai nyomásának összege egyensúlyt tart a külső levegő  $p_0$  nyomásával. A légköri nyomást  $p_0$  jelöli:

$$p_0 = p_h + p$$



15. ábra Sűrűség mérése Bernoulli törvénye alapján

Az áramló levegőre felírhatjuk Bernoulli törvényét és a folytonossági tételt. Az egyik hely a légszivattyú összeszűkülő keresztmetszete, a másik a kísérleti helység légtere, amely 0 m/s sebességgel mozog, és a statikus nyomás megegyezik a külső légnyomással,  $p_0$ -val. Az összeszűkülő keresztmetszetben a levegő áramlási sebessége  $v_{levegő}$ , sűrűsége  $\rho_{levegő}$ , és a statikus nyomás  $p$ .

$$p + \frac{1}{2} \rho_{levegő} v_{levegő}^2 = p_0$$

Összevetve az előbbi egyenlettel

$$p_h + p = \frac{1}{2} \rho_{levegő} v_{levegő}^2 + p$$

Ebből

$$p_h = \frac{1}{2} \rho_{levegő} v_{levegő}^2$$

A csőben felemelkedett folyadék hidrosztatikai nyomása ( $g$  a nehézségi gyorsulás):

$$p_h = \rho_{\text{folyadék}} h_{\text{folyadék}} g$$

Így

$$\rho_{\text{folyadék}} h_{\text{folyadék}} g = \frac{1}{2} \rho_{\text{levegő}} v_{\text{levegő}}^2$$

Ez a kifejezés alkalmas ismert sűrűségű folyadék esetén a levegő sebességének meghatározására, ill. a levegő sebességének ismeretében egy ismeretlen sűrűség meghatározására. Ha pl. vízzel végezzük a kísérletet, akkor a víz és a levegő sűrűségének ismeretében, a vízoszlop magasságának leméréssel a levegő sebessége kiszámítható:

$$v_{\text{levegő}} = \sqrt{\frac{2\rho_{\text{víz}} h_{\text{víz}} g}{\rho_{\text{levegő}}}}$$

Ha egy ismeretlen sűrűségű ( $\rho_x$ ) folyadék  $h_x$  magasságra emelkedik fel, amikor a levegő  $v_{\text{levegő}}$  sebességgel áramlik, akkor

$$\rho_x = \frac{\frac{1}{2} \rho_{\text{levegő}} v_{\text{levegő}}^2}{h_x g}$$

A levegő állandó sebességét úgy tudjuk biztosítani, hogy a porszívóra kapcsolt feszültséget állandó értéken tartjuk. Különböző levegő sebességeket a porszívóra kapcsolt feszültség változtatásával lehet beállítani.

Nem szükséges a levegő sebességének ismerete ahhoz, hogy ismeretlen sűrűséget mérjünk. Először vízbe állítjuk a csövet és azután ugyanolyan levegő sebességnél ismeretlen sűrűségű folyadékba, akkor:

$$\rho_{\text{víz}} h_{\text{víz}} g = \frac{1}{2} \rho_{\text{levegő}} v_{\text{levegő}}^2$$

és

$$\rho_x h_x g = \frac{1}{2} \rho_{\text{levegő}} v_{\text{levegő}}^2$$

Ezen két egyenletből a baloldalak egyenlőségével kapjuk, hogy

$$\rho_{\text{víz}} h_{\text{víz}} g = \rho_x h_x g, \text{ ill. } \rho_x = \rho_{\text{víz}} \frac{h_{\text{víz}}}{h_x}.$$

Ezzel lényegében a sűrűség mérését hosszúság mérésére vezettük vissza: a víznél és az ismeretlen sűrűségű folyadéknál az emelkedés magasságát lemérve és ismerve a víz sűrűségét, a fenti egyenletből az ismeretlen sűrűség meghatározható.

### ***A mérés menete.***

A légáram előállításához porszívót használunk. A porszívóra adott feszültség változtatásával változtatható a légáram sebessége. A porszívóra kapcsolt feszültség értékét digitális voltmérővel mérjük. Egy pohárba először vizet öntünk. A vízszög légszivattyúhoz csatlakozó függőleges műanyagcsövet a hozzáerősített vonalzóval együtt a vízbe állítjuk. Óvatosan elkezdjük a porszívóra kapcsolt feszültség értékét egy toroid transzformátor segítségével növelni. 30 V – 60 V feszültségtartományban 10 V-onként növeljük a feszültség értékét. Az öt beállított feszültségnél a műanyagcsőben felemelkedett vízoszlop magasságát leolvassuk. Ezt a feszültség lecsökkentésével, majd újra emelésével még kétszer megismételjük. Ezután a

mérendő sűrűségű folyadékba állítjuk a műanyagcsövet a vonalzóval együtt. Az előbbi feszültségeket állítjuk be újra (ezzel biztosítjuk, hogy a légáram sebessége ugyanaz), és a csőben felemelkedett folyadékoszlop magasságát megmérjük, szintén minden feszültségnél háromszor. Az egy feszültséghez tartozó vízoszlop magasságokat, illetve folyadékoszlop magasságokat átlagoljuk, ezek lesznek a  $h_{v\acute{z}}$  és  $h_x$ . Ezekkel az értékekkel a  $\rho_x = \rho_{v\acute{z}} \frac{h_{v\acute{z}}}{h_x}$

képlet segítségével kiszámítjuk a folyadék sűrűségét. A víz sűrűségét adott hőmérsékleten táblázatból keressük ki.

A víz sűrűségét különböző hőmérsékleten a következő táblázat tartalmazza:

t°C	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	t°C	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	t°C	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>
15	999,10	20	998,21	25	997,06
16	998,95	21	998,01	26	996,79
17	998,75	22	997,777	27	996,52
18	998,61	23	997,546	28	996,24
19	998,41	24	997,310	29	995,95

A  $h_{v\acute{z}}$  értékek ismeretében az egyes feszültségeknél meghatározhatjuk a levegő áramlási sebességét a  $\rho_{v\acute{z}} h_{v\acute{z}} g = \frac{1}{2} \rho_{leveg\acute{o}} v_{leveg\acute{o}}^2$  összefüggéssel. A levegő sűrűsége 1,293 kg/m<sup>3</sup>.

A  $p + \frac{1}{2} \rho_{leveg\acute{o}} v_{leveg\acute{o}}^2 = p_0$  összefüggésből a csőben kialakuló nyomást határozhatjuk meg. A pillanatnyi légnyomás,  $p_0$ , értékét nyomásmérőről olvassuk le. Ha a légköri nyomás aktuális értéke nem ismeretes, akkor helyettesítsük annak konvencionális valódi értékét: 101325 Pa. (A Nemzetközi Metrológiai Értelmező Szótárban: Conventional true value of a quantity).

### **Feladatok**

Határozzuk meg a kiadott oldat sűrűségét öt különböző feszültségértéknél!

Egy-egy feszültségnél háromszor mérjük meg a vízoszlop, ill. a folyadékoszlop magasságát! Számítsuk ki az átlagot, a szórást és az átlag szórását!

Egy-egy feszültségnél az átlagértékek felhasználásával számítsuk ki az oldat sűrűségét! Határozzuk meg az így kapott öt sűrűség átlagát, szórását és átlagszórását!

Határozzuk meg az öt különböző feszültségnél a légáram sebességét és a csőben uralkodó nyomást!

Ábrázoljuk a villamos feszültség és a mért sűrűség összefüggését! A mérőfeszültséget a vízszintes tengelyre vegyük fel. Tekintettel arra, hogy a feszültség nem befolyásolja a sűrűséget, ez az összefüggés csakis vízszintes egyenes vonallal közelíthető. Ha  $\rho$  a sűrűség és  $s_\rho$  a szórása, akkor további vízszintes vonalat húzunk a  $\rho + s_\rho$  és a  $\rho - s_\rho$  értékeknél. A mérési eredmények kétharmada ezen a sávon belül helyezkedik el, ha a sűrűség értékek normális eloszlást követnek.



### 3.5. Folyadék sűrűségének mérése rezgő kapillárisal

Ha egy  $m$  tömeg harmonikus rezgőmozgást végez, akkor a rezgés periódus ideje,  $T$  a következőképpen adható meg

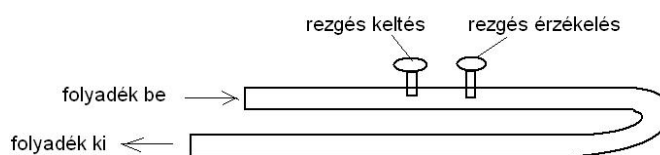
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

$D$  a rugalmasságra jellemző állandó, mértékegysége Nm. A periódusidő és az  $f$  frekvencia, ill. az  $\omega$  körfrekvencia között a következő összefüggések állnak fenn:

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Ha az  $m_U$  egy U-alakú cső tömege (16. ábra) üresen és  $m_s$  tömegű folyadékot öntünk bele, akkor a folyadékkal telt cső rezgés ideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_U + m_s}{D}}$$



16. ábra Rezgő cső folyadék sűrűségének méréséhez

Ha a folyadék sűrűsége  $\rho_s$  és térfogata  $V_T$ , amely az U-alakú cső belső térfogata, akkor az  $m_s = \rho_s V_T$  alapján a rezgésidő négyzete:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m_U + \rho_s V_T}{D}$$

Ebből kifejezve a folyadék sűrűségét:

$$\rho_s = \frac{T^2 D}{4\pi^2 V_T} - \frac{m_U}{V_T} = \frac{D}{4\pi^2 V_T} \left( T^2 - \frac{4\pi^2 m_U}{D} \right)$$

Bevezetve két jelölést:

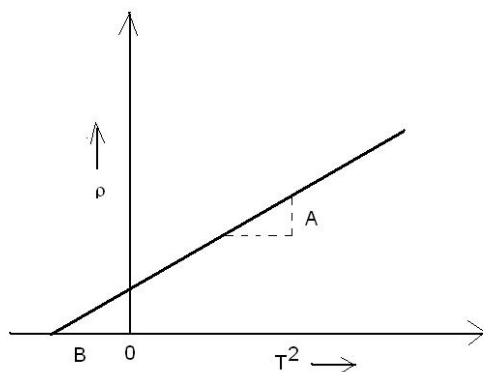
$$A = \frac{D}{4\pi^2 V_T} \quad \text{és} \quad B = \frac{4\pi^2 m_U}{D}$$

A folyadék sűrűsége

$$\rho_s = A(T^2 - B)$$

Az  $A$  és  $B$  az eszközre jellemző állandók. Kísérletileg úgy lehet meghatározni (17. ábra), hogy két ismert sűrűségű folyadékot töltünk a csőbe és mérjük a rezgésidőket. A rezgésidők

négyzetének függvényében ábrázoljuk a sűrűséget. Egy egyenest kell kapnunk, amelynek a meredeksége  $A$  és a vízszintes tengelyt  $-B$ -nél metszi.



17. ábra A rezgőcsöves sűrűségmérő konstansainak meghatározása

Ez a sűrűségmérő módszer alkalmas folyamatok során a folyadékok sűrűségének meghatározására.

## Szilárd test sűrűségének mérése

### Elméleti összefoglaló

A sűrűség,  $\rho$ , definíciója homogén test esetén: a test  $m$  tömege osztva a test  $V$  térfogatával:

$\rho = \frac{m}{V}$  A sűrűség SI mértékegysége  $\text{kg/m}^3$ , használatos még a  $\text{kg/dm}^3$ ,  $\text{kg/l}$  és a  $\text{g/cm}^3$  Az átszámítás az egyes mértékegységek között:

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{l}} = \frac{10^3 \text{ g}}{10^3 \text{ cm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{ml}} = \frac{1 \text{ kg}}{10^{-3} \text{ m}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \text{ill.} \quad 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

Nem homogén testnél az  $m/V$  hányados a test átlagsűrűségét adja meg. A sűrűség értéke függ a hőmérséklettől és a nyomástól. Gondos méréseknél mindig meg kell adni a hőmérséklet és a nyomás értékét.

A szabályos alakú szilárd testeknél a térfogat számítható. A szabálytalan alakú szilárd testeknél a térfogat egyszerűen meghatározható vízkiszorítás módszerével, ha a test anyaga nem oldódik vízben. Zöldségek és gyümölcsök sűrűségének meghatározásához megmérjük a tömeget egy mérleggel. A térfogatot úgy mérjük meg, hogy egy beosztással ellátott mérőhengerbe adott jelig desztillált vizet öntünk. A mérendő sűrűségű anyagot behelyezzük a mérőhengerbe és leolvassuk a vízszint emelkedését, a leolvasott térfogat változás adja a test térfogatát. A sűrűséget számítjuk.

**Eszközök**      zöldség vagy gyümölcs, amelynek a sűrűségét határozzuk meg  
Kés a szeleteléshez  
Mérőhenger  
Mérleg (legalább 0,1 g pontosságú)  
Csapvíz a térfogatméréshez

### A mérés és a kiértékelés menete

#### Egy szelet esetén

Mérőhenger megtöltése vízzel adott jelig  
Megfelelő méretű (beleférjen a mérőhengerbe) minta előkészítése  
A minta tömegének megmérése háromszor  
A minta térfogatának megmérése vízkiszorítással háromszor  
Az adatok táblázatba foglalása  
A tömeg és a térfogat mért értékeiből az átlag, a szórás és az átlag szórása kiszámítása  
Az átlag tömegből és az átlag térfogatból a sűrűség kiszámítása  
A sűrűség hibájának kiszámítása hibaterjedéssel  
A három térfogat és a három tömeg értékből három sűrűség érték számítása, majd ezekből számoljon egy átlag sűrűséget  
Ezen átlagérték összehasonlítása az átlag tömeg és az átlag térfogat hányadosából nyert sűrűségértékkel.  
Értékelés

### A kiadott zöldség vagy gyümölcs sűrűségének meghatározása

Tömeg			
$m, \text{g}$	$\bar{m}, \text{g}$	$s_m, \text{g}$	$\sigma_m, \text{g}$

Térfogat			
$V, \text{ml}$	$\bar{V}, \text{ml}$	$s_V, \text{ml}$	$\sigma_V, \text{ml}$

Sűrűség					
$\rho = \frac{\bar{m}}{\bar{V}}, \text{g/ml}$	$\Delta\rho, \text{g/ml}$	$\rho = \frac{m}{V}, \text{g/ml}$	$\bar{\rho}, \text{g/ml}$	$s_\rho, \text{g/ml}$	$\sigma_\rho, \text{g/ml}$

Átlag számítása

Szórás számítása

Átlag szórásának számítása

Sűrűség hibájának számítása hibaterjedés módszerével

A kétféle módon számolt sűrűség hiba összehasonlítása

*Három szelet esetén*

Mérőhenger megtöltése vízzel adott jelig

Megfelelő méretű (beleférjen a mérőhengerbe) minta előkészítése

Három minta tömegének megmérése

A fenti három minta térfogatának megmérése vízkiszorítással

Az adatok táblázatba foglalása

A három térfogat és a három tömeg értékből három sűrűség érték számítása, majd ezekből számoljon egy átlag sűrűséget

Ezen átlagérték összehasonlítása az átlag tömeg és az átlag térfogat hányadosából nyert sűrűségértékkel.

A sűrűség hibájának kiszámítása hibaterjedéssel

Értékelés

**A kiadott zöldség vagy gyümölcs sűrűségének meghatározása**

Tömeg	Térfogat
$m, g$	$V, ml$

$\Delta\rho, g/ml$	$\rho = \frac{m}{V}, g/ml$	$\bar{\rho}, g/ml$	$s_{\rho}, g/ml$	$\sigma_{\rho}, g/ml$

Átlag számítása

Szórás számítása

Átlag szórásának számítása

Sűrűség hibájának számítása hibaterjedés módszerével

A kétféle módon számolt sűrűség hiba összehasonlítása

## Folyadék sűrűségének mérése areométerrel

### Elméleti összefoglaló

Az areométer (úszó sűrűségmérő) nehezékkal, esetleg még hőmérővel is ellátott, üvegből készült test (8. ábra), amelynek az alsó része szélesebb, a felső része egy keskeny, skálával ellátott cső. Ha folyadékba merülve az areométer úszik, akkor az areométerre ható felhajtó erő ( $F_{fel}$ ) éppen megegyezik a test  $G$  súlyával. Ha az areométer térfogata  $V_a$ , átlagos sűrűsége  $\rho_a$ , valamint az areométer folyadékba merülő térfogatrésze  $V_a'$ , akkor a felhajtó erő – a kiszorított folyadék súlya -  $F_{fel} = \rho_{folyadék} V_a' g$ ,  $\rho_{folyadék}$  a folyadék sűrűsége. Az areométer súlya  $G = \rho_a V_a g$ . Ezek nyugalmi állapotban egyenlők egymással  $F_{fel} = G$ , ill.  $\rho_{folyadék} V_a' g = \rho_a V_a g$ . Ha a felső üvegcső keresztmetszete  $A$ , és  $l$  hosszúságú darab áll ki a folyadékból, akkor  $V_a' = V_a - Al$  kifejezést beírva a fenti összefüggésbe és  $\rho_{folyadék}$ -t kifejezve  $\rho_{folyadék} = \rho_a \frac{V_a}{V_a - lA} = \rho_a \frac{1}{1 - l \left( \frac{A}{V_a} \right)}$ . Ebben a kifejezésben a folyadék sűrűsége és

a kiálló hossz között egyértelmű matematikai összefüggés van. Ez a matematikai függvény egyszerűsíthető, ha az  $l \left( \frac{A}{V_a} \right)$  mennyiség elég kicsi. Hitelesítéssel meghatározható, hogy a

különböző sűrűségű folyadékokhoz milyen  $l$ , azaz milyen osztás tartozik. Ha az osztást sűrűsége kalibrálják, akkor a bemerülés mélységéből rögtön a sűrűség olvasható le.

Kis koncentrációjú oldatoknál a sűrűség és a koncentráció között az összefüggés lineáris:  $\rho = \rho_o + aC$ ,  $\rho_o$  és  $a$  konstansok.  $\rho_o$  és  $a$  meghatározása után az ismeretlen koncentrációt a sűrűség ismeretében a következőképpen határozhatjuk meg. Megmérjük az oldat sűrűségét,

$\rho_x$ -t. Beírva a fenti egyenletbe és kifejezve  $C_x$ -t:  $C_x = \frac{\rho_x - \rho_o}{a}$ .

**Eszközök** 250 ml-s mérőhenger  
Különböző koncentrációjú sóoldatok  
Areométerek

### A mérés menete és a kiértékelése

Az egyes oldatok beleöntése a mérőhengerbe

Megfelelő areométer kiválasztása – az areométernek úsznia kell

Sűrűség leolvasása

Adatok táblázatba foglalása

Regressziós egyenes meredekségének és tengelymetszetének meghatározása számolással

Sűrűség (függőleges tengely) – koncentráció (vízszintes tengely) grafikon elkészítése

A mért pontok ábrázolása

Kettő, tetszőlegesen választott, de nem mért sűrűség adatból számolt pontok

koordinátáinak meghatározása regressziós egyenlet alapján, felvétele a diagramra

Regressziós egyenes berajzolása a két számolt pont felhasználásával

Ismeretlen koncentráció meghatározása számítással és grafikonról történő leolvasással

Értékelés

**Kiadott sóoldatok sűrűségének meghatározása, ismeretlen koncentráció megadása**

	víz	Sóoldatok				ismeretlen
		1	2	3	4	
C, g/l						
C, kg/m <sup>3</sup>						
C, mol/l						
$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>						

A kiadott oldatok koncentrációjának átszámítása a táblázatban megadott koncentráció mértékegységekbe.

A laboratóriumi szobahőmérséklet:.....

Víz sűrűségének meghatározása a fenti hőmérsékleten  
Interpolálás

Regressziós egyenes

Regressziós egyenes meredekségének számítása

Regressziós egyenes metszetének számítása

Számolt pontok

$c_1 = \dots\dots\dots$

$c_2 = \dots\dots\dots$

$\rho_1 = \dots\dots\dots$

$\rho_2 = \dots\dots\dots$

Ismeretlen koncentráció kiszámítása

## Folyadék sűrűségének mérése Bernoulli törvény alapján

### Elméleti összefoglaló

A Bernoulli egyenlet súrlódás mentes, összenyomhatatlan folyadék vagy gáz stacionárius (időben állandó) áramlására az energia megmaradás törvényét fejezi ki egységnyi térfogatra:

$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + p_2$ .  $p$  a sztatikus nyomás,  $v$  a közeg sebessége,  $\rho$  a közeg sűrűsége,  $h$  egy választott vonatkoztatási szinthez képest mért magasság és  $g$  a nehézségi gyorsulás (12. ábra).

A levegő áramot porszívóval hozzuk létre. A légáramot egy vízszögár légszivattyún (14. ábra) engedjük át. A szivattyú szűk keresztmetszetében a levegő sebessége nagyon megnő, és ekkor a sztatikus nyomás csökken. Ha az alacsony nyomású térhez egy üvegsővel csatlakozunk (15. ábra), amelynek az alja egy folyadékot tartalmazó edényben áll, akkor a folyadék felemelkedik a csőben  $h$  magasságra. Ilyenkor a folyadék  $p_h$  hidrosztatikai nyomásának és a csőben levő levegő  $p$  sztatikai nyomásának összege egyensúlyt tart a külső levegő  $p_0$  nyomásával. A légköri nyomást  $p_0$  jelöli:  $p_0 = p_h + p$ . Az áramló levegőre felírhatjuk Bernoulli törvényét. Az egyik hely a légszivattyú összeszűkülő keresztmetszete, a másik a kísérleti helyiség légttere, amely 0 m/s sebességgel mozog, és a statikus nyomás megegyezik a külső légnyomással,  $p_0$ -val. Az összeszűkülő keresztmetszetben a levegő áramlási sebessége

$v_{\text{levegő}}$ , sűrűsége  $\rho_{\text{levegő}}$ , és a sztatikus nyomás  $p$ .  $p + \frac{1}{2}\rho_{\text{levegő}}v_{\text{levegő}}^2 = p_0$  Összevetve a fenti

összefüggéssel:  $\rho_{\text{folyadék}}h_{\text{folyadék}}g = \frac{1}{2}\rho_{\text{levegő}}v_{\text{levegő}}^2$ . Ez a kifejezés alkalmas ismert sűrűségű

folyadék esetén a levegő sebességének meghatározására, ill. a levegő sebességének ismeretében egy ismeretlen sűrűség meghatározására.

**Eszközök** Kísérleti összeállítás: porszívó, műanyagcső, skála (folyadékszint emelkedési magasságának mérésére), vízszögár légszivattyú, edény, Csapvíz és ismeretlen sűrűségű oldat  
Toroid transzformátor – porszívó feszültségének szabályozására  
Multiméter – porszívó feszültségének mérésére

### A mérés és a kiértékelés menete

Víz beleöntése a mérő edénybe

Porszívó feszültségének beállítása öt különböző feszültségre

A víz emelkedési magasságának leolvasása minden feszültségnél

Az edénybe a víz helyett a kiadott oldatot tesszük.

Az oldat esetében is leolvassuk az emelkedési magasságokat a víznél beállított feszültségeknél

A leolvasott adatok táblázatba foglalása

A vízzel mért magasságokból és az aktuális légnyomás értékéből a levegő sebességének és a statikus nyomásának kiszámítása minden feszültségre

Az oldattal mért magasságokból az oldat sűrűségének meghatározása

A sűrűség – feszültség grafikon elkészítése

A sűrűség – feszültség grafikonon az átlag sűrűség és az átlag szórása értékek feltüntetése

Értékelés



A kiadott oldat sűrűségének meghatározása Bernoulli törvény alapján

U,V	víz	bor	$\rho_{\text{bor}},$ kg/m <sup>3</sup>	$\bar{\rho}_{\text{bor}}$ kg/m <sup>3</sup>	$S_{\text{pbor}},$ kg/m <sup>3</sup>	p, Pa	$v_{\text{lev}},$ m/s
	$h_{\text{víz}},$ mm	$h_{\text{alk}},$ mm					

Hőmérséklet.....

Víz sűrűségének meghatározása a mérés hőmérsékletén

Átlag számítások

Szórás számítások

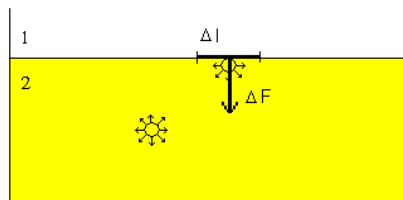
Átlag szórásának számítása

Levegő statikus nyomásának meghatározása

Levegő áramlási sebességének meghatározása

#### 4. Felületi feszültség mérése

Két (egymással nem elegyedő közeg) határán mindig fellép a felületi feszültségből származó erő. Oka, hogy a közegek felületén elhelyezkedő atomokra, vagy molekulákra ható erők értéke nem egyezik meg a közeg belsejében levő részecskékre ható erők értékével. Ugyanis, a közeg belsejében elhelyezkedő részecskére a szomszédos részecskéktől származó erők eredője nulla, míg a felszínen levő részecskékre a folyadék belseje felé irányuló eredő erő tapasztalható.



18. ábra Felületi feszültség értelmezése

A 18. ábrán az 1 (pl. levegő) és a 2 (pl. víz) közeg határán,  $\Delta l$  szakaszon  $\Delta F$  erő hat a folyadék belseje felé. Az erő arányos a szakasz hosszával:

$$\Delta F = \alpha \Delta l,$$

ill. ebből kifejezve  $\alpha$ -t

$$\alpha = \frac{\Delta F}{\Delta l}$$

Ez a **felületi feszültség**,  $\alpha$ , definíciója. A felületi feszültség mértékegysége N/m. A felületi feszültséget gyakran jelölik  $\gamma$  betűvel is.

Ha általában felületi feszültségről beszélünk egy anyag esetén, akkor ezen az illető anyag és levegő határán mérhető felületi feszültséget értjük.

Ha egy folyadékhártya felületét  $\Delta A$  értékkel megnöveljük, akkor az ehhez szükséges munka

$$\Delta W = \alpha \Delta A$$

Ebben az összefüggésben az  $\alpha$ -t **fajlagos felületi energiának** nevezzük, amelynek számértéke megegyezik a fent definiált  $\alpha$  értékkel. A fajlagos felületi energia mértékegysége  $J/m^2$ . Ha a két közeg határfelülete nem sík, akkor ún. görbületi nyomás lép fel a két közeg határán. Gömbfelület esetén a görbületi nyomás:

$$p_g = \frac{2\alpha}{r}$$

A tiszta anyag felületi feszültsége általában csökken, ha másik anyagot adunk hozzá. A víz felületi feszültsége csökken, ha bármilyen anyagot oldunk benne, hiszen a vízmolekulák közötti kölcsönhatási erő értéke csökken. Az oldott anyag koncentrációja és az oldat felületi feszültsége között matematikai összefüggés van. Sokszor a felületi feszültséget mérésrel meghatározzuk, és a függvény ismeretében a koncentrációt kiszámítjuk. Detergenszek (mosogatószer) ún. micellákat (speciális szerkezetű aggregátumokat) képeznek, ha nagy a koncentrációjuk a vízben. Kis koncentrációnál és nagy koncentrációnál is a felületi feszültség és a koncentráció közötti függvénykapcsolat lineáris, azaz mindkét koncentráció tartományban a függvény képe egyenes, csak kis koncentrációnál az egyenes meredeksége nagy, míg micellák jelenlétében kisebb. A micellák kialakulására jellemző, ún. kritikus micella koncentrációt felületi feszültség mérésrel is meg lehet határozni. Különböző koncentrációjú oldatok felületi feszültségét mérve és ábrázolva a koncentráció függvényében két egyenest kapunk, amelyeknek a metszéspontja megadja a kritikus micella koncentrációt, azt a koncentrációt, ahol először megjelennek a micellák.

A következő táblázat etilalkohol és víz különböző arányú elegyének felületi feszültségét tartalmazza különböző hőmérsékleteken levegőre vonatkoztatva.

A táblázatban a felületi feszültség mértékegysége mN/m (milliNewton/méter)

tömegtört	hőmérséklet, °C						
	-20	-10	0	+10	+20	+30	+40
0			75,6	74,1	72,6	71,1	69,9
10			51,4	49,7	47,9	46,1	44,4
20		42,7	41,3	39,8	38,4	37,0	35,6
30	36,5	35,6	34,7	33,7	32,8	31,9	31,0
40	32,7	32,0	31,3	30,6	29,9	29,2	28,5
50	31,0	30,3	29,6	28,9	28,2	27,5	26,8
60	29,8	29,1	28,4	27,7	27,0	26,3	25,6
70	28,8	28,1	27,4	26,7	26,0	25,3	24,6
80	27,8	27,0	26,3	25,6	24,8	24,1	23,4
90	26,8	26,1	25,3	24,5	23,7	22,9	22,2
100	25,8	25,0	24,1	23,3	22,4	21,6	20,7

Természetesen 0 % a tiszta vizet; 100 % a tiszta alkoholt jelenti. Az alkohol-víz elegy eutektikus pontja -115 °C; ilyen hőmérsékleten nem ismeretes a felületi feszültsége.

A felületi feszültség értéke függ a hőmérséklettől, várhatóan csökken, hiszen a kölcsönhatás a molekulák között csökken a hőmérséklet emelkedésével. A felületi feszültség hőmérsékletfüggését Eötvös Loránd után a következő képlettel számíthatjuk:

$$\alpha V_m^{2/3} = k(T_C - 6 - T)$$

$\alpha$  a felületi feszültség,  $V_m$  a folyadék moláris térfogata,  $T_C$  a kritikus hőmérséklet,  $T$  az aktuális hőmérséklet. Az Eötvös-féle állandó  $k = 210 \cdot 10^{-9} \text{ J/K}$ . Nézzünk erre egy példát! A víz sűrűsége 25 °C-on  $997 \text{ kg/m}^3$ , moláris tömege  $M = 0,018015 \text{ kg/mol}$ . Moláris térfogata

$$V_m = \frac{M}{\rho} = \frac{0,018015 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{997 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0,000018 \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$$

Kritikus hőmérséklete 374 °C, azaz 647 K. Eötvös állandója kisebb, mint az elméleti érték: 103 nJ/K. Keressük a felületi feszültségét 25 °C-ra, tehát 298 K-re.

$$\alpha = \frac{k(T_C - 6 - T)}{V_m^{2/3}} = \frac{103 \text{ nJ/K}(647\text{K} - 6\text{K} - 298\text{K})}{\left(0,000018 \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}\right)^{2/3}} = \frac{103 \cdot 10^{-9} 343}{0,000686} = 0,051 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

A hatványozás miatt az Eötvös-állandó mértékegységét (és mérőszámát) szabályosabb így jelölni:  $210 \cdot 10^{-9} \frac{\text{J}}{\text{K mol}^{2/3}}$ ; a számításban ezt nem jelöltük.

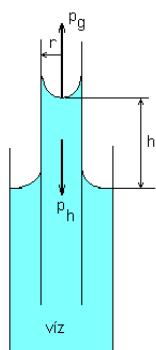
Eötvös a felületi feszültségek meghatározása céljából először is egy új eljárást dolgozott ki, az ún. reflexiós módszert. E módszer lehetővé tette a különböző folyadékok felületi feszültségének nagy pontosságú meghatározását. Kísérletei során azt találta, hogy összefüggés van a folyadékok felületi feszültsége és molekulásúlyuk között. Ezen az alapon a folyadékok felületi feszültségének a hőmérséklettel való változásából meghatározhatjuk a folyadékok molekulásúlyát. Ez a fontos összefüggés az Eötvös-féle törvény, mely kimondja, hogy valamennyi egyszerűen összetett folyadék molekuláris felületi energiája 1 °C hőmérsékletváltozásra ugyanannyit változik. Ez az általános gázállandó megfelelője a folyadék állapotra.

A  $0,051 \text{ N/m}$  érték kisebb a víz mért felületi feszültségénél ( $0,073 \text{ N/m}$ ). Ennek oka az, hogy a víz molekula erősen poláros, magas az asszociációs foka és ezért a moláris térfogata valójában kisebb, mint ahogyan a fenti képlet alapján számítjuk.

#### 4.1 A felületi feszültség mérési módszerei.

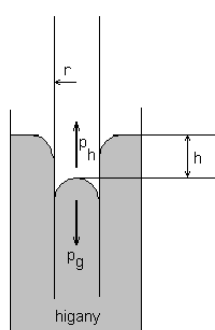
##### Felületi feszültség mérése kapilláris emelkedés módszerével

Ha kapilláris (kicsiny belső átmérőjű) üvegcsövet merítünk vízbe, akkor, a víz felszíne a csőben magasabban lesz, mint az edényben (19. a ábra). Ha pedig folyékony higanyba merítjük az üveg csövet, akkor a csőben a higany szint alacsonyabban lesz, mint az edényben (19. b ábra)



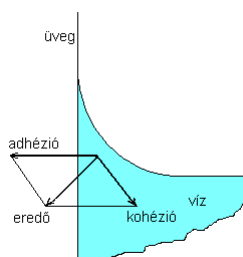
19.a ábra

Kapilláris emelkedés (a)

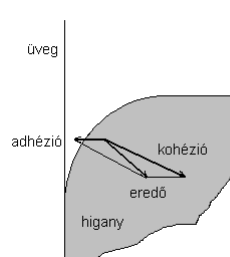


19.b ábra

és süllyedés (b)



20.a ábra



20. b ábra

Üveg és víz (nedvesítő folyadék; a) és higany (nem nedvesítő folyadék; b) határa A víz nedvesíti az üveget, azaz a víz és az üveg között viszonylag nagy az adhéziós erő (20. ábra) a vízmolekulák közötti kohéziós erőhöz képest. A kialakuló folyadék felszín olyan, hogy merőleges az eredő erőre. A higany és az üveg esetén a higanymolekulák között fellépő kohéziós erő nagyobb az üveg és higany közötti adhéziós erőhöz képest. A folyadék felszín itt is merőleges az eredő erőre.

A kapilláris emelkedésnél, ill. a süllyedésnél a hidrosztatikai nyomás ( $p_h$ ) és a görbületi nyomás ( $p_g$ ) egyenlő egymással

$$\rho gh = \frac{2\alpha}{r}$$

Ebből a kifejezésből a felületi feszültség meghatározható, ha ismerjük a kapilláris sugarát, a folyadék sűrűségét és emelkedési magasságát.

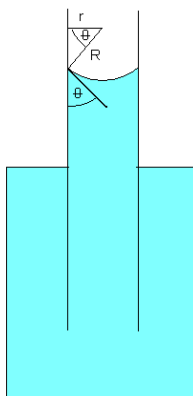
$$\alpha = \frac{r\rho gh}{2}$$

Ez a kifejezés akkor érvényes, ha kapillárisban a folyadék felszíne tökéletes félgömb, azaz a folyadék felszínhez húzott érintő a folyadék hártya végénél éppen függőleges. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a víz tökéletesen nedvesíti az üveget. Valóságban a folyadék felszín nem

tökéletes félgömb (21. ábra), és a folyadékfelszínhez húzott érintő  $\Theta$  szöget zár be az üvegcső falával. A  $\Theta$  szöget illeszkedési szögnek nevezik. Az érintő merőleges a gömb sugarára ( $R$ ), így merőleges szárú szögek miatt az ábra alapján a görbületi nyomás

$$p_g = \frac{2\alpha}{R} = \frac{2\alpha}{\frac{r}{\cos \Theta}} = \frac{2\alpha \cos \Theta}{r}$$

$r = R \cos \Theta$



21. ábra Az illeszkedési szög ( $\Theta$ ) értelmezése és szerepe

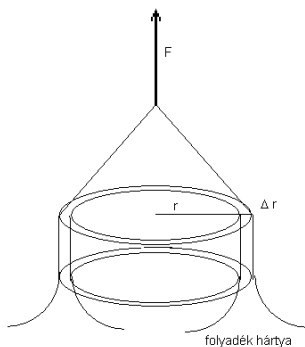
Ebben az esetben a felületi feszültség meghatározásához még a  $\Theta$  szöget is ismernünk kell

$$\alpha = \frac{r\rho gh}{2 \cos \Theta}$$

Gondosan megtisztított kapilláris esetén ez a módszer alkalmas a felületi feszültség meghatározására.

### Felületi feszültség mérése du Noüy gyűrűszakítás módszerrel és változata: az ú.n. minimális módszer, fémtű használatával

Ha valamely anyagot nedvesít a folyadék, akkor az ebből az anyagból készült testet kihúzza a folyadékból, folyadékhártya alakul ki a test és a folyadék között, amely akkor szakad le, ha a húzóerő egyenlő a test súlyának és a felületi feszültségből származó erőnek az eredőjével. Pl. egy fémgűrű és víz esetén (22. ábra) a húzó  $F$  erő a gyűrű  $G$  súlyának, valamint a gyűrű külső és belső szélé mentén fellépő felületi feszültségből származó erőnek az összege.



22. ábra Gyűrű leszakítás módszere

$$F = G + \alpha[2r\pi + 2(r + \Delta r)\pi]$$

Mérve  $F$ -et és ismerve  $r$ -t és  $\Delta r$ -t, az  $\alpha$  felületi feszültség számítható.

Részletesen nem ismertetjük:

**Quincke-mérleg:** drótkeretre elmozdítható keresztirányú huzalt erősítünk, amelyre mérlegsúlyt lehet függeszteni. A keret belsejében kifeszített folyadékhártya így egyensúlyt tart a súlyerővel.

**Wilhelmy plate módszer:** függőleges síklapot süllyesztünk a folyadékba, és mérjük rajta az erő értékét

**Jaeger's buboréknyomásos módszer** (pl. levegő befúvatásával)

**Érintkezési szög** mérése: vízszintes felületen nyugalomban elhelyezett folyadékcseppnek a felülettel bezárt szögét mérjük.

**Függő csepp** módszere: kapilláris végén függő folyadékcsepp átmérőjét és hosszát mérjük. A módszer használható igen magas hőmérsékleten is; üvegnél, fémolvadékoknál.

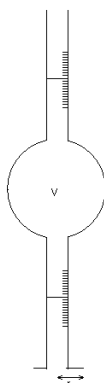
## 4.2 Felületi feszültség mérése sztalagmométerrel

A sztalagmométer (23. ábra) egyfajta speciális hasas pipetta, melynek alsó csöve kapilláris. A kapilláris vége kiszélesedik, a sugara  $r$ . A pipetából lassan kicsepegő cseppek akkor szakadnak le, amikor a növekvő csepp súlya ( $G_{csepp}$ ) éppen egyenlővé válik a felületi feszültségből származó erővel ( $\alpha 2\pi r$ ):

$$G_{csepp} = \alpha 2\pi r .$$

Egy csepp súlyát megkapjuk, ha a  $V$  térfogatú folyadék kicsepegésekor megszámloljuk a cseppeket. Ha  $n$  cseppet számolunk, akkor

$$G_{csepp} = \frac{G}{n} = \frac{\rho V g}{n}$$



23. ábra Sztalagmométer

A  $V$  a sztalagmométer felső és alsó szárán levő körbefutó osztások közötti térfogat,  $\rho$  a folyadék sűrűsége és  $g$  a nehézségi gyorsulás. Így

$$\alpha 2\pi r = \frac{\rho V g}{n} .$$

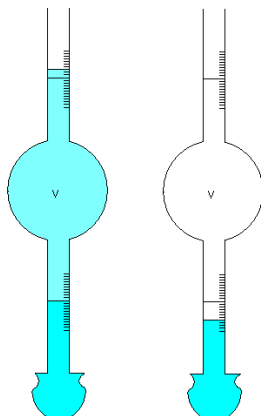
Ha  $r$ -t,  $V$ -t és a sűrűséget ismerjük,  $n$ -t számoljuk, akkor  $\alpha$  meghatározható. Mivel  $r$  és  $V$  pontos mérése nehéz, ezért általában relatív mérést végzünk. A fenti egyenletet felírjuk, pl. vízre és az ismeretlen felületi feszültségű anyagra:

$$\alpha_{v\acute{e}z} 2\pi r = \frac{\rho_{v\acute{e}z} V g}{n_{v\acute{e}z}} \quad \text{és} \quad \alpha_x 2\pi r = \frac{\rho_x V g}{n_x}$$

és elosztjuk egymással.  $V$ -vel,  $r$ -rel,  $g$ -vel és  $2\pi$ -vel lehet egyszerűsíteni és kapjuk, hogy

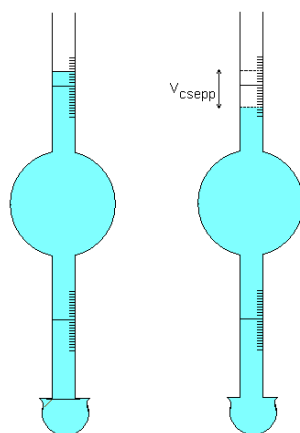
$$\alpha_x = \alpha_{v\acute{e}z} \frac{\rho_x n_{v\acute{e}z}}{\rho_{v\acute{e}z} n_x}$$

A víz felületi feszültségét és sűrűségét ismerjük – táblázatokból kikereshetőek, a cseppszámokat megszámláljuk mind a vízre, mind az ismeretlen folyadékra, a mérendő oldat sűrűségét ( $\rho_x$ ) megmérjük és  $\alpha_x$ -t számoljuk.



24. ábra Mérés sztalagmométerrel

Méréskor az első 1-2 cseppet nem számoljuk, mivel másképp cseppennek le, mint a további cseppek. Ezért méréskor a sztalagmométerbe a folyadékot a felső körbefutó jel fölé szívjuk fel, majd 1-2 cseppet számolás nélkül leengedünk. Ezután megnézzük, hogy hol van a folyadék felszíne a körkörös jelhez képest, és feljegyezzük (pl. a körkörös jel felett 3 osztással). Ezután megszámláljuk a pipetából kifolyó cseppek számát ( $n$ ) és feljegyezzük, hogy a folyadék felszín hol áll (pl. 7 osztással az alsó körkörös jel alatt). Ekkor nem pontosan a  $V$  térfogatban levő cseppek számát határoztuk meg, hanem  $7+3=10$  osztásnak megfelelő többlet térfogatban levő cseppek számát. Hogy tudjunk korrigálni, meg kell határozni, hogy hány osztás egy csepp. Ha például a következő ábrának megfelelően



25. ábra Csepp korrekció

egy csepp térfogata 16 osztás, akkor egy osztásnak  $1/16$  csepp felel meg. Így az előző példában az  $n$  cseppszámot csökkenteni kell  $10/16$  cseppszámmal:  $n - \frac{10}{16}$ ; ennyi csepp lesz

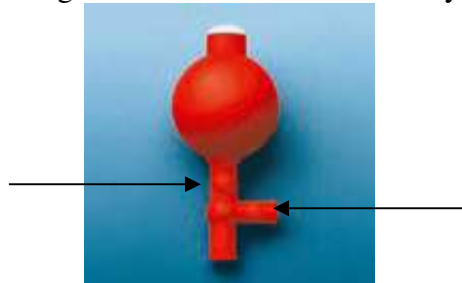
pontosan a  $V$  térfogatban. Ezt a korrekciós eljárást nevezik cseppkorrekciónak.

A sűrűség is és a felületi feszültség is függ a hőmérséklettől. A víz felületi feszültségét  $t$  °C-n a következő egyszerűsített összefüggéssel kapjuk meg:

$$\alpha = 0.076(1 - 0.002 t_c) \text{ N/m}$$

### A mérés menete

A pipettázó labdacsból (26. ábra) kinyomjuk a levegőt. Ezután felhúzzuk a sztalagmométerre, majd a sztalagmométer alját vízbe merítjük. Megnyomjuk a felszívó szelepet (egy felfelé mutató nyíl van rajta; az ábrán baloldalt), és felszívjuk a vizet a felső függőleges száron levő osztások fölé. A kiengedő szelepet (lefelé mutató nyíl van rajta) óvatosan megnyomjuk, és addig engedünk le cseppeket, amíg a vízszint az osztásoknál helyezkedik el.



26. ábra. Griffin labda

Megjegyezzük, melyik osztásnál van a vízszint. Ekkor egyetlen csepp leengedésekor megszámoljuk, hány osztást süllyedt a vízszint. Ez lesz egy vízcsepp térfogatának megfelelő osztásszám. Ezt a művelet sort a víz újra felszívása után még kétszer megismételjük. Az így kapott három érték számtani közepe lesz egy cseppnek megfelelő osztás. Ezután következik a sztalagmométerben levő víz mennyiségnek megfelelő cseppszám meghatározása. Megjegyezzük, hogy melyik osztásnál van a folyadékszint, és megszámoljuk a sztalagmométerből kicsepegtető cseppek számát a kiengedő szelep folytonos nyomása mellett. Megnézzük, hogy a lenti osztásoknál hol áll a vízszint a cseppszámlálás végén. Kiszámítjuk a cseppkorrekció értékét, majd a  $V$  térfogatban levő korrigált cseppszámot. Ezt a műveletsort is még kétszer megismételjük a vízzel, majd háromszor a mérni kívánt folyadékkal. A három víz

cseppszámból, ill. a három folyadék cseppszámból a  $\alpha_x = \alpha_{\text{víz}} \frac{\rho_x n_{\text{víz}}}{\rho_{\text{víz}} n_x}$  összefüggéssel

meghatározzuk az ismeretlen felületi feszültséget. Az ismeretlen sűrűséget areométerrel mérjük. A víz sűrűségét táblázatból keressük ki az adott hőmérsékleten, a felületi feszültségét pedig a  $\alpha = 0.076(1 - 0.002 t_c)$  képlettel számítjuk.

### Feladatok

A kiadott oldat felületi feszültségének meghatározása három méréssel.

Egy cseppnek megfelelő osztás szám meghatározása háromszor víznél és a mérendő oldatnál. Először a víz kicsepegtetésekor kapott cseppszámok meghatározása csepp korrekcióval háromszor.

A kiadott oldat kicsepegtetésekor kapott cseppszámok meghatározása csepp korrekcióval háromszor.

A három mérésből az oldat felületi feszültségének meghatározása

A kapott felületi feszültségek átlagának kiszámítása, a szórás és az átlag szórásának meghatározása.



## Felületi feszültség meghatározása sztalagmométerrel

### Elméleti összefoglaló

Két (egymással nem elegyedő közeg) határán mindig fellép a felületi feszültségből származó erő. Oka, hogy, a közeg belsejében elhelyezkedő részecskére a szomszédos részecskéktől származó erők eredője nulla, míg a felszínen levő részecskékre a folyadék belseje felé irányuló eredő erő tapasztalható. A 18. ábrán az 1 (pl. levegő) és a 2 (pl. víz) közeg határán,  $\Delta l$  szakaszon  $\Delta F$  erő hat a folyadék belseje felé. Az erő arányos a szakasz hosszával:

$\Delta F = \alpha \Delta l$ , kifejezve  $\alpha$ -t  $\alpha = \frac{\Delta F}{\Delta l}$ . Ez a **felületi feszültség**,  $\alpha$ , definíciója. A felületi

feszültség mértékegysége N/m.

Ha egy folyadékhártya felületét  $\Delta A$  értékkel megnöveljük, akkor az ehhez szükséges munka  $\Delta W = \alpha \Delta A$ . Ebben az összefüggésben az  $\alpha$ -t **fajlagos felületi energiának** nevezzük, amelynek számértéke megegyezik a fent definiált  $\alpha$  értékkel. A fajlagos felületi energia mértékegysége J/m<sup>2</sup>.

Ha a két közeg határfelülete nem sík, akkor ún. görbületi nyomás lép fel a két közeg határán.

Gömbfelület esetén a görbületi nyomás:  $p_g = \frac{2\alpha}{r}$ . A tiszta anyag felületi feszültsége

általában csökken, ha másik anyagot adunk hozzá. A víz felületi feszültsége csökken, ha bármilyen anyagot oldunk benne, hiszen a vízmolekulák közötti kölcsönhatási erő értéke csökken. A felületi feszültség hőmérsékletfüggését Eötvös Loránd után a következő képlettel számíthatjuk:  $\alpha V_m^{2/3} = k(T_C - 6 - T)$   $\alpha$  a felületi feszültség,  $V_m$  a folyadék moláris térfogata,  $T_C$  a kritikus hőmérséklet,  $T$  az aktuális hőmérséklet. Az Eötvös-féle állandó  $k = 210 \cdot 10^{-9}$  J/K.

A sztalagmométer (23. ábra) egyfajta speciális hasas pipetta, melynek alsó csöve kapilláris. A sugara  $r$ . A pipettából kicsepegő cseppek akkor szakadnak le, amikor a növekvő csepp súlya éppen egyenlővé válik a felületi feszültségből származó erővel:  $G_{csepp} = \alpha 2\pi r$ . Egy csepp

súlyát megkapjuk, ha a  $V$  térfogatú folyadék kicsepegésekor megszámoljuk a cseppeket. Ha  $n$  cseppet számolunk, akkor  $G_{csepp} = \frac{G}{n} = \frac{\rho V g}{n}$ . Az összefüggéseket felírjuk, pl. vízre és az

ismeretlen felületi feszültségű anyagra:  $\alpha_{v\acute{e}z} 2\pi r = \frac{\rho_{v\acute{e}z} V g}{n_{v\acute{e}z}}$  és  $\alpha_x 2\pi r = \frac{\rho_x V g}{n_x}$ , kapjuk, hogy

$$\alpha_x = \alpha_{v\acute{e}z} \frac{\rho_x n_{v\acute{e}z}}{\rho_{v\acute{e}z} n_x}$$

**Eszközök** sztalagmométer, (Griffin labda), főzőpohár  
Víz és ismeretlen felületi feszültségű oldat

### A mérés és az értékelés menete

Víz felszívása a sztalagmométerbe a felső jel fölé

Az első törcsepp elengedése, amennyiben szükséges, további egész cseppek elengedése a skála eléréséig, mivel a csepptérfogat mérésének megkezdésekor a folyadékszintnek a skálázott részbe kell esnie.

Egy csepp térfogatának megfelelő osztás szám meghatározása háromszor

A  $V$  térfogatot meghatározó alsó és a felső jel közötti víz lecsepegtetése és a cseppek számának meghatározása, feljegyezve a fenti és az alsó osztás helyét előjel helyesen

Cseppkorrekció alkalmazása – a számolt cseppszám korrigálása a tört csepp számmal

Víz sűrűségének és felületi feszültségének meghatározása a mérés hőmérsékletén

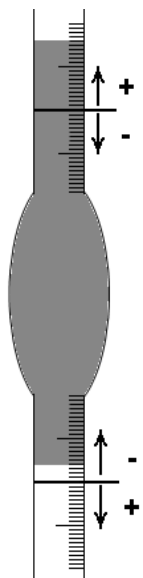
A mérendő oldat sűrűségének meghatározása

Egy csepp térfogatának megfelelő osztásszám meghatározása a mérendő oldattal háromszor

A V térfogatot meghatározó alsó és a felső jel közötti oldat lecsepegtetése és a cseppek számának meghatározása, feljegyezve a fenti és az alsó osztás helyét előjelhelyesen

Felületi feszültség kiszámítása

Értékelés



cseppkorrekciós mintaábra

### A kiadott oldat felületi feszültségének meghatározása

	1 cseppnek megfelelő osztás $n_o$	$\overline{n_o}$	1 osztásnak megfelelő cseppszám $\frac{1}{\overline{n_o}}$
víz			
bor			

	Osztás fent	Osztás lent	Korrektció	n számolt	n korrigált
víz					
bor					

$n_{\text{víz}}$ korrigált	$\rho_{\text{víz}}$ kg/m <sup>3</sup>	$\alpha_{\text{víz}}$ N/m	$n_{\text{bor}}$ korrigált	$\rho_{\text{bor}}$ kg/m <sup>3</sup>	$\alpha_{\text{bor}}$ N/m	$\overline{\alpha_{\text{bor}}}$ N/m	$s_{\alpha_{\text{bor}}}$ N/m	$\overline{\sigma_{\alpha_{\text{bor}}}}$ N/m

Hőmérséklet:.....

Víz sűrűségének meghatározása interpolálással

Víz felületi feszültségének meghatározása

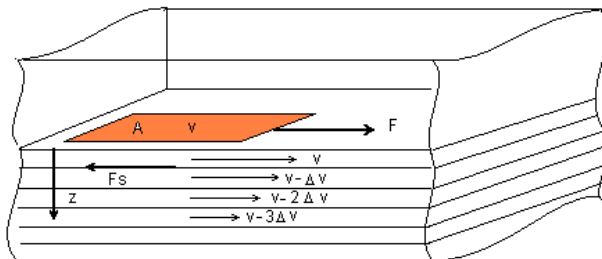
$$\alpha = 0.076(1 - 0.002t_{\text{c}}) \text{ N/m}$$

Cseppkorrekcióhoz ábrák

Értékelés

## 5. Viszkozitás mérése

A reális folyadékok áramlása veszteséges. Az itt következő méréseknél most ezt vesszük figyelembe. Súrlódás lép fel az egymáson elcsúszó folyadék részek között. Kísérleti megfigyelések alapján, ha egy folyadék felszínén egy  $A$  felületű lapot mozgatunk állandó  $v$  sebességgel, akkor ahhoz állandó nagyságú,  $F$  erő szükséges.



27. ábra Réteges (lamináris) áramlás  
viszkozitás definíciója a Newton-féle súrlódási törvény alapján

Ezt a jelenséget úgy képzeljük el, hogy a legfelső folyadékréteg hozzátapad a laphoz (a lapot nedvesíti a folyadék), ez a réteg  $v$  sebességgel mozog. A következő, lejjebb levő réteg, már egy kicsit kisebb sebességgel,  $v - \Delta v$  sebességgel mozog. A sebesség csökkenés oka a **két folyadék réteg között fellépő súrlódási erő**. A súrlódási erő és a mozgató  $F$  erő egyenlő nagyságú és ellentétes irányú egymással, mivel a felső folyadékréteg állandó sebességgel mozog (a rá ható erők eredője nulla). Az erő, a felület és a sebességcsökkenés között a következő összefüggés áll fenn:

$$F = \eta A \frac{dv}{dz},$$

amelyet **Newton-féle súrlódási törvénynek** nevezünk, és amely az  $\eta$  **viszkozitást definiálja**. A viszkozitás mértékegysége a fenti egyenletből Pa s. Mivel a víz viszkozitása ezerszer kisebb, emiatt gyakorta használják a mPa s mértékegységet is.

A fenti egyenletet átrendezve, és bevezetve a  $\tau = \frac{F}{A}$  nyírófeszültséget, kapjuk, hogy

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz}$$

Azért nevezzük  $\tau$ -t nyírófeszültségnek, mert  $F$  iránya párhuzamos az  $A$  felülettel és a felső folyadékréteget mintegy elnyírja, elcsúsztatja az alatta levő rétegen. Másik neve: *csúsztatófeszültség*. Ilyen réteges (lamináris) áramlás csak kis sebességeknél lép fel. Ha a sebesség nagy, akkor örvényes, turbulens áramlás jön létre. A turbulencia kritériumot a Reynolds-féle szám adja meg.

Azokat a közegeket, amelyekre igaz a Newton-féle súrlódási törvény, és a viszkozitás nem függ a sebességtől, *newtoni* közegeknek nevezzük. Ezeknél a  $\frac{dv}{dz}$  sebesség gradiens

függvényében a  $\tau$  nyíró feszültséget ábrázolva az origóból kiinduló egyenest kapunk.

A viszkozitás jelenségét lamináris áramlásra a Hagen–Poiseuille-törvénnyel írjuk le. Ezt a mérési gyakorlatnál ismertetjük.

Fent definiáltuk a dinamikai viszkozitási együtthatót. Ennek alapján határozzuk meg a

**kinematikai viszkozitási** együtthatót:  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ , ahol  $\rho$  a sűrűség.

### A viszkozitás hőmérsékletfüggése.

Ezt Svante Arrhenius és de Guzman szerint számítjuk:

$$\eta = Ae^{\frac{\Delta E}{RT}}$$

Itt  $\eta$  a dinamikai viszkozitási együttható,  $A$  az egyenlet konstansa,  $e$  a természetes logaritmus alapja,  $\Delta E$  az aktiválási energia,  $R$  az általános gázállandó, és  $T$  az abszolút hőmérséklet. Víz esetén érdemes  $A = 1 \text{ Pa s}$  és  $\Delta E = 17\,000 \text{ J/mol}$  értékekkel számolni.

$$A = 5,11803E-07 \text{ Pa s}$$

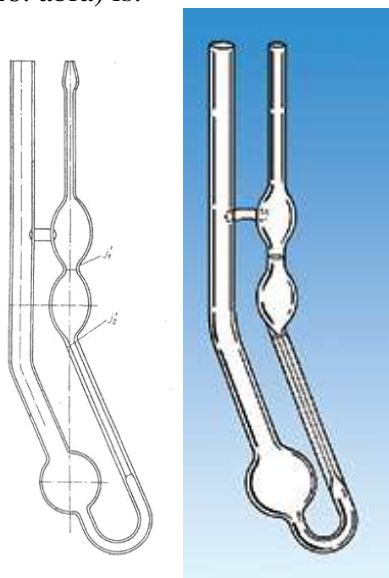
### Ostwald–Fenske viszkoziméter

Ha egy  $l$  hosszúságú,  $r$  sugarú csőben  $\Delta p = p_1 - p_2$  nyomás különbség hatására  $t$  idő alatt  $V$  térfogatú,  $\eta$  viszkozitású folyadék áramlik át stacionárius, réteges áramlással, akkor a következő összefüggés adja meg az  $I_v = \frac{dV}{dt} = \frac{V}{t}$  térfogatáramot:

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{p_1 - p_2}{l} r^4$$

Ezt az egyenletet nevezzük Hagen–Poiseuille törvénynek.

Az Ostwald-féle (29. ábra) kapilláris viszkoziméter U-alakú cső, amelynek egyik szárában  $l$  hosszúságú,  $r$  sugarú kapilláris van. Ezen keresztül áramlik a felső gömbből a  $V$  térfogatú,  $\eta$  viszkozitású,  $\rho$  sűrűségű folyadék  $t$  idő alatt a  $p_1 - p_2 = \rho g \frac{h_1 + h_2}{2}$  átlagos hidrosztatikai nyomás különbség hatására az alsó gömbbe. Hasonló elven működik a gyakorlaton használt Cannon-Fenske viszkoziméter (28. ábra) is.

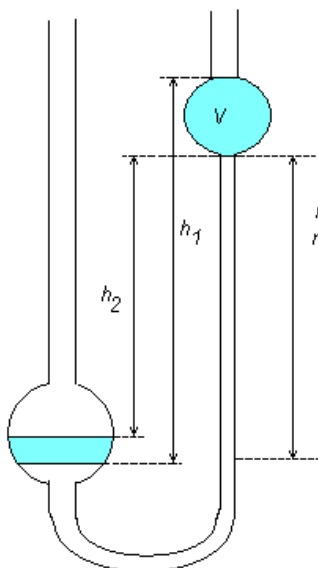


28. ábra Cannon-Fenske kapillárisviszkoziméter

Beírva a hidrosztatikai nyomás kifejezését a Hagen–Poiseuille törvénybe, kapjuk, hogy

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{\rho g}{l} \frac{h_1 + h_2}{2} r^4$$

Ez az összefüggés már használható a viszkozitás meghatározására, ha megmérjük a  $V$ , a  $\rho$ , az  $r$ , az  $l$ , a  $h_1$  és  $h_2$  értékét és mérjük azt a  $t$  időt, amely alatt a felső gömb felső szélén levő jeltől a folyadék szint a felső gömb alsó szélén levő jelig csökken, azaz amíg a  $V$  térfogat átáramlik a kapillárison.



29. ábra Ostwald-féle kapilláris viszkoziméter

A  $V$ ,  $l$  és  $r$  értékét nehéz pontosan megmérni, ezért vízhez viszonyított relatív mérést végzünk. Először vizet áramoltatunk át a kapillárison, majd az ismeretlen viszkozitású folyadékot. A két folyadékból azonos térfogatot kell a viszkoziméterbe önteni, hogy a hidrosztatikai nyomásnál a magasságok számtani közepe azonos legyen mindkét folyadékra. Mindkét folyadék áramlási idejét mérjük. Mindkét sűrűséget meghatározzuk. Felírva a két összefüggést:

$$\frac{V}{t_{\text{víz}}} = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta_{\text{víz}}} \frac{\rho_{\text{víz}} g \frac{h_1 + h_2}{2}}{l} r^4$$

és

$$\frac{V}{t_x} = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta_x} \frac{\rho_x g \frac{h_1 + h_2}{2}}{l} r^4$$

Elosztva a két egyenletet, és az ismeretlen viszkozitást kifejezve kapjuk, hogy:

$$\eta_x = \eta_{\text{víz}} \frac{\rho_x t_x}{\rho_{\text{víz}} t_{\text{víz}}}$$

A víz hőmérsékletét megmérjük és a hozzátartozó sűrűséget táblázatból keressük ki. A víz viszkozitását az alábbi táblázatból írjuk ki, vagy határozzuk meg lineáris interpolálással:

Víz hőmérséklete, °C	Víz viszkozitása, Pa s
0	$1,797 \cdot 10^{-3}$
5	$1,525 \cdot 10^{-3}$
10	$1,301 \cdot 10^{-3}$
15	$1,138 \cdot 10^{-3}$
20	$1,006 \cdot 10^{-3}$
25	$0,8938 \cdot 10^{-3}$
30	$0,7998 \cdot 10^{-3}$
35	$0,7229 \cdot 10^{-3}$
40	$0,6563 \cdot 10^{-3}$
60	$0,4735 \cdot 10^{-3}$
80	$0,3570 \cdot 10^{-3}$
95	$0,2993 \cdot 10^{-3}$

Szokásos a viszkozitást mPa s-ban mérni, mert így a szobahőmérsékletű víznél egy közelébe esik az értéke.

Az egyes folyadékok áramlási idejét háromszor egymás után megmérjük, majd az átlag átfolyási idővel határozzuk meg a viszkozitást. Kiszámítjuk az átfolyási idők szórását is. Feltételezzük, hogy a viszkozitás meghatározásának hibáját főleg az időmérésben elkövetett hiba okozza. A hibaterjedés törvénye alapján a viszkozitás hibája:

$$\Delta\eta_x = \sqrt{\left(\frac{d\eta_x}{dt_x}\right)^2 (\Delta t_x)^2 + \left(\frac{d\eta_x}{dt_{v\acute{z}}}\right)^2 (\Delta t_{v\acute{z}})^2} = \sqrt{\left(\eta_{v\acute{z}} \frac{\rho_x}{\rho_{v\acute{z}} t_{v\acute{z}}}\right)^2 (\Delta t_x)^2 + \left(-\eta_{v\acute{z}} \frac{\rho_x t_x}{\rho_{v\acute{z}} t_{v\acute{z}}^2}\right)^2 (\Delta t_{v\acute{z}})^2}$$

A képletben  $\Delta t$  az időmérés szórása.

[http://fizika3.bc.szie.hu/jegyzet/viszkozitas\\_hibaterjedes.pdf](http://fizika3.bc.szie.hu/jegyzet/viszkozitas_hibaterjedes.pdf)

### **A mérés menete**

A viszkoziméterbe 10 ml vizet öntünk. A pipettázó labdacsból kinyomjuk a levegőt, majd a viszkoziméter  $V$  térfogatú tartálya feletti szárra csatlakoztatjuk. A felszívó szelepet megnyomva, óvatosan felszívjuk a vizet a  $V$  térfogatú részbe úgy, hogy a víz szintje a felső részen levő jel fölött legyen. A labdacsot eltávolítjuk a viszkoziméterről és megmérjük azt az időt, amíg a víz szintje a felső jeltől az alsó jelig csökken, azaz azt az időt mérjük, amíg a  $V$  térfogatú víz átáramlik az  $l$  hosszúságú,  $r$  sugarú kapillárison. Víz esetén még kétszer megmérjük az átfolyási időt. Ezután a vizet kiöntjük a viszkoziméterből és a mérendő folyadékból öntünk bele 10 ml térfogatot. Ezzel a folyadékkal is megismételjük háromszor az átfolyási idő mérését. Az átfolyási időket mind a vízre, mind a folyadékra átlagoljuk, szórást, ill. átlag szórását számítunk. A víz sűrűségét és viszkozitását táblázatból keressük ki, az ismeretlen folyadék sűrűségét areométerrel mérjük meg. Az ismeretlen viszkozitást

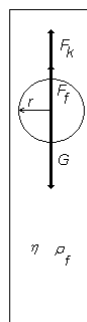
$\eta_x = \eta_{v\acute{z}} \frac{\rho_x t_x}{\rho_{v\acute{z}} t_{v\acute{z}}}$  összefüggés alapján számítjuk. A viszkozitás hibáját a hibaterjedés törvénye alapján határozzuk meg.

### **Feladatok**

A kiadott folyadék viszkozitását határozzuk meg. Először vizet folytatjuk át a viszkoziméter kapillárisán háromszor, majd az ismeretlen folyadékot. Az átlagolt időekkel számolunk. A hibaterjedés alapján meghatározzuk a viszkozitás hibáját.

## Höppler viszkoziméter

Ha egy  $\eta$  viszkozitású,  $\rho$  sűrűségű folyadékban egy  $r$  sugarú golyó esik állandó  $v$  sebességgel, akkor a golyóra ható erők eredője nulla.



30. ábra Folyadékban, vagy gázban eső golyóra ható erők

A  $G$  súlyerő lefelé hat, az  $F_f$  felhajtó erő felfelé, és az  $F_k$  közegellenállási erő pedig szintén felfelé, mivel a golyó lefelé mozog. Az erők egyensúlya:  $F_k + F_f - G = 0$ . Ha a közegellenállási erő a Stokes-féle súrlódási erő:  $F_k = 6\pi r \eta v$ , és a felhajtó erő, a kiszorított folyadék súlya:

$F_f = \frac{4r^3\pi}{3} \rho_{\text{folyadék}} g$ , ill. a golyó súlya:  $G = \frac{4r^3\pi}{3} \rho_{\text{golyó}} g$ . Felírva az erők egyensúlyát kifejező összefüggést:

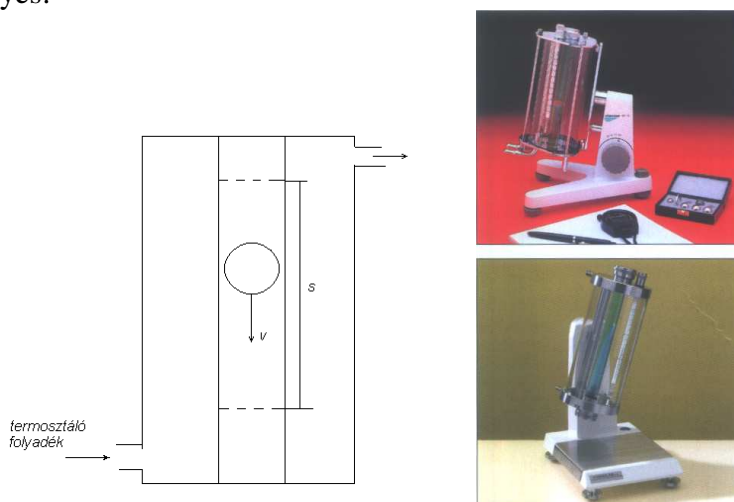
$$\frac{4r^3\pi}{3} \rho_{\text{folyadék}} g + 6\pi r \eta v - \frac{4r^3\pi}{3} \rho_{\text{golyó}} g = 0$$

A  $v$  sebességet meghatározhatjuk, ha a golyó esési idejét,  $t_e$ -t, mérjük két jel között; a két jel közötti távolságot,  $s$ -t osztjuk az esési idővel,  $v = \frac{s}{t_e}$ . A sebességet beírva a fenti egyenletbe

a folyadék viszkozitása kifejezhető:

$$\eta = \frac{2g(\rho_{\text{golyó}} - \rho_{\text{folyadék}})r^2}{9s} t_e$$

A Stokes-törvény akkor érvényes, ha a golyó átmérője összemérhető a folyadék molekuláinak méretével. A Höppler viszkoziméterben (31. ábra) a golyó átmérője sokkal nagyobb. Ha a golyót nedvesíti a folyadék, akkor lényegében a golyót körül vevő folyadék réteg molekulái gördülnek le a többi folyadék molekula között. Ezért a fenti összefüggés helyett a következő összefüggés érvényes:



31. ábra Höppler-féle viszkoziméter képe és sematikus ábrája



$$\eta = K(\rho_{\text{golyó}} - \rho_{\text{folyadék}})t_e$$

A  $K$  egy golyóra és készülékre meghatározott konstans, amelyet gyárilag megadnak.  
A következő táblázat a golyókészletünk adatait tartalmazza

a golyó			K műszerállandója		minimális viszkozitás
jele	átmérője	sűrűsége	cgs	SI	
	mm	kg/m <sup>3</sup>	cP.cm <sup>3</sup> /g.s	Pa.m <sup>3</sup> /kg	Pa.s
<b>GGL</b>	15,910	2409		0,001.10 <sup>-6</sup>	gázokra
<b>1</b>	15,805	2409	0,01013	0,01013.10 <sup>-6</sup>	0,0006
<b>2</b>	15,630	2410	0,08063	0,08063.10 <sup>-6</sup>	0,003
<b>3</b>	15,560	8100	0,13	0,13.10 <sup>-6</sup>	0,025
<b>4</b>	15,000	7760	1,2	1,2.10 <sup>-6</sup>	0,25
<b>5</b>	13,500	7770	10,6	10,6.10 <sup>-6</sup>	2,5
<b>6</b>	10,000	7770	40,5	40,5.10 <sup>-6</sup>	3–80
<b>e</b>	12,500	7750	37	37.10 <sup>-6</sup>	4,5–80
<b>f</b>	10,900	7750	38	38.10 <sup>-6</sup>	5

A víz, ill. a vizes oldatok viszkozitásának mérésére általában az „1” jelű, 15,805 mm átmérőjű, 2409 kg/m<sup>3</sup> sűrűségű és  $K=0,01013 \cdot 10^{-6}$  Pa·m<sup>3</sup>/kg állandójú golyó alkalmas. A folyadék betöltésénél és a golyó behelyezésénél vigyázni kell arra, hogy ne kerüljön a golyóhoz buborék, mert az meghamisítja a mérést. A golyónak teljesen tisztának, zsírmentesnek kell lennie, mert különben a folyadék nem nedvesíti a golyót, és így nem lesz lamináris az áramlás. A golyó tisztítására általában adnak egy bőr törlőkendőt. A golyót csipesszel kell beletenni az ejtőcsőbe.

A Höppler-féle viszkoziméternél a golyó-ejtő csövet üveghenger veszi körül, amelyben termosztáló folyadékot keringtethetünk, így különböző hőmérsékleten mérhető a viszkozitás. Általában a folyadékok viszkozitása csökken a hőmérséklet emelkedésével.

A Höppler viszkoziméter alkalmas a viszkozitás pontos mérésére különböző hőmérsékleteken. A viszkozitás a hőmérséklet-függését a következő összefüggés írja le:

$$\eta = A e^{\frac{\Delta E}{RT}}$$

Itt  $\eta$  a dinamikai viszkozitási együttható, az  $A$  konstans,  $e$  a természetes logaritmus alapszáma,  $\Delta E$  az aktiválási energia,  $R = 8.314$  J/molK, az általános gázállandó, és  $T$  az abszolút hőmérséklet. Víz esetén  $A = 1$  Pa s és  $\Delta E = 17\,000$  J/mol.

Az  $A$  és  $\Delta E$  értékeket a következőképpen lehet meghatározni. Meghatározzuk a viszkozitást különböző hőmérsékleteken, majd az abszolút hőmérséklet reciprok értékének a függvényében ábrázoljuk a viszkozitás természetes alapú logaritmusát. A pontokra regressziós egyenest illesztünk, amelynek egyenlete

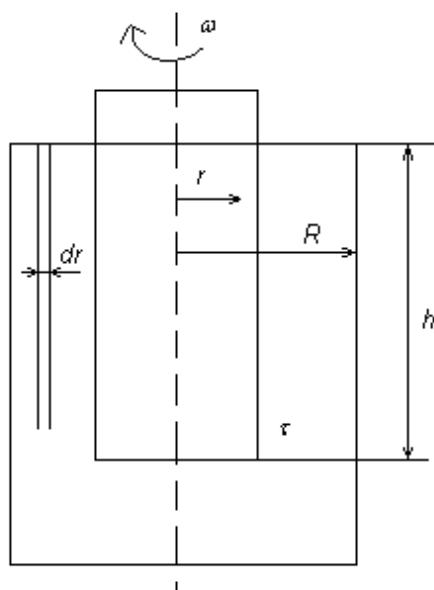
$$\ln \eta = \ln A + B \frac{1}{T}$$

az egyenes tengelymetszete megadja  $\ln A$ -t, az egyenes meredeksége, pedig a  $B = \frac{\Delta E}{R}$  hányadost, amelyből az aktiválási energia meghatározható.

### Rotációs viszkoziméter

A rotációs viszkoziméternél (31. ábra) egy henger forog állandó,  $\omega$ , szögsebességgel a mérendő folyadékot tartalmazó hengeres edényben. A hengerre ható  $M$  forgatónyomatékkal a folyadékban keletkező ellenállás tart egyensúlyt. A folyadékban fellépő  $\tau$  nyírófeszültség az  $r$  sugarú,  $h$  magasságú henger felületén hoz létre  $F_{ny} = \tau 2r\pi h$  nyíróerőt, illetve  $F_{ny}r$  forgatónyomatékokat, amely az  $M$ -mel tart egyensúlyt:

$$M = 2\pi r h \tau$$



32. ábra Rotációs viszkoziméternél a forgó henger és álló edény sematikus ábrája

Egy adott  $r$  sugárnál a kerületi sebesség  $v = r\omega$ , az  $r+dr$  sugárnál pedig:

$$v + dv = (r + dr)(\omega + d\omega)$$

A jobb oldalon a szorzásokat elvégezve:  $r\omega + dr\omega + rd\omega + drd\omega$ . Az utolsó tagot, amely másodrendűen kicsi elhanyagoljuk. A többi beírjuk a fenti egyenletbe:

$$dv = rd\omega + dr\omega$$

Ebből a  $dv/dr$  sebesség gradienst kifejezzük:

$$\frac{dv}{dr} = \omega + r \frac{d\omega}{dr}$$

Ha a folyadék nedvesíti a hengert, azaz a hengerre tapadó folyadékréteg együtt mozog a hengerrel, akkor a nyírás sebességét a  $dv/dr$ -t csak az  $rd\omega/dr$  tag határozza meg, vagyis

$$\frac{dv}{dr} = r \frac{d\omega}{dr}$$

newtoni közeg esetén

$$\tau = \eta \left( -\frac{dv}{dr} \right) = \eta \left( -r \frac{d\omega}{dr} \right)$$

Ezt a kifejezést beírva a forgatónyomaték kifejezésébe, kapjuk, hogy

$$M = 2\pi r h \eta \left( -r \frac{d\omega}{dr} \right) r$$

Innen kifejezve a  $d\omega$ -t

$$-d\omega = \frac{M}{2\pi h \eta} \frac{dr}{r^3}$$

Ez egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amelynek a bal oldala csak az  $\omega$  függvénye, a jobb oldala pedig csak az  $r$  függvénye. Integrálva:

$$\int_0^{\omega} -d\omega = \int_r^R \frac{M}{2\pi h \eta} \frac{dr}{r^3}$$

Az integrálást elvégezve és a viszkozitást kifejezve:

$$\eta = \frac{M}{4\pi h \omega} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right)$$

Ismerve a henger és az edény sugarát, a henger bemelegítési mélységét, valamint a forgatónyomatékot és a szögsebességet, a viszkozitás számolható. Általában a különböző éleknél és felületeknél különböző hatások lépnek fel. Ezért a rotációs viszkozimétereket ismert viszkozitású folyadékkal hitelesítik, és korrekciós tényezőt határoznak meg.

A nem-newtoni folyadékokra a nyíró feszültség a sebesség gradiens tört kitevős hatványával arányos:

$$\tau = \eta^n \left( -\frac{dv}{dr} \right)^n = \eta^n \left( -r \frac{d\omega}{dr} \right)^n.$$

Az  $\eta^n$  itt az ún. látszólagos viszkozitás, a nyírófeszültség és a sebesség gradiens hányadosa. Hasonló számításokat végezve, kapjuk:

$$\omega = \frac{n}{2} \left( \frac{\tau}{\eta^n} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{2}{n}} \right]$$

Ezen kifejezés alapján a  $\lg \tau$ -t ábrázolva a  $\lg \omega$  függvényében, megkapjuk az  $n$ -et, amellyel aztán a látszólagos viszkozitást is meghatározhatjuk.

A gyakorlaton bemutatjuk a Haake RotoVisco1 rotációs viszkozimétert.

## Viszkozitás meghatározása Ostwald-féle viszkoziméterrel

### Elméleti összefoglaló

Ha a folyadék rétegek párhuzamosan csúsznak el egymáson, a rétegek között fellépő súrlódási erő:  $F = \eta A \frac{dv}{dz}$ , ahol  $\eta$  a viszkozitás,  $A$  a folyadék réteg felülete és  $\frac{dv}{dz}$  az elmozdulás

irányára merőlegesen a sebesség gradiens. A sebesség gradiens azt jelenti, hogy a legfelső réteg  $v$  sebességgel a az egyel lejjebb levő réteg  $v - \Delta v$  sebességgel mozog, egy réteg vastagsága  $\Delta z$ . Ezt nevezzük **Newton-féle súrlódási törvénynek** Bevezetve a  $\tau = \frac{F}{A}$

nyírófeszültséget, kapjuk, hogy  $\tau = \eta \frac{dv}{dz}$ . Azért nevezzük  $\tau$ -t nyírófeszültségnek, mert  $F$

iránya párhuzamos az  $A$  felülettel. A viszkozitás definíciója:  $\eta = \frac{\tau}{\frac{dv}{dz}}$ , mértékegysége: Pas,

vagy mPas. A kinematikai viszkozitás:  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ , ahol  $\rho$  a sűrűség. A viszkozitás függ a

hőmérséklettől:  $\eta = Ae^{\frac{\Delta E}{RT}}$ ,  $A$  az egyenlet konstansa,  $e$  a természetes logaritmus alapja,  $\Delta E$  az aktiválási energia,  $R$  az általános gázállandó, és  $T$  az abszolút hőmérséklet.

$r$  sugarú,  $l$  hosszúságú kapilláris csőben réteges áramlásra érvényes a Hagen-poiseuille-törvény:  $\frac{V}{t} = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\eta} \frac{p_2 - p_1}{l} r^4$ , a  $V$  térfogat átáramlási ideje  $t$ . A  $p_1 - p_2 = \frac{h_1 + h_2}{2} \rho g$ ,

hidrosztatikai nyomás határozza meg,  $h_1$  és  $h_2$  a folyadékoszlopok magassága 28. ábra. Megmérve az átfolyási időt vízre és az ismeretlen viszkozitású anyagra, ismerve a víz és az anyag sűrűségét, valamint a víz viszkozitását, az ismeretlen viszkozitást kiszámítjuk:

$$\eta_x = \eta_{\text{víz}} \frac{\rho_x t_x}{\rho_{\text{víz}} t_{\text{víz}}}$$

### Eszközök:

Cannon-Fenske viszkoziméter Bunsen állvánnyal és fogóval  
Stopperóra,  
Víz és ismeretlen viszkozitású folyadék

### A mérés és az értékelés menete

Viszkoziméter felerősítése a Bunsen-állványra

Víz beletöltése és felszívása a második gömb feléig

Annak az időtartamnak a mérése háromszor egymás után, amíg a víz átfolyik az alsó gömb két jele között

Annak az időtartamnak a mérése háromszor egymás után, amíg az ismeretlen folyadék átfolyik az alsó gömb két jele között

A mellékelt táblázat kitöltése

Víz sűrűségének és viszkozitásának az interpolálása a mérés hőmérsékletére.

Az ismeretlen viszkozitású folyadék sűrűségének meghatározása.

Az ismeretlen viszkozitás kiszámítása

A viszkozitás hibájának kiszámítása.

Értékelés

A kiadott ismeretlen viszkozitású folyadék viszkozitásának meghatározása

	t s	$\bar{t}$ s	$s_t$ s	$\sigma_t$ s	$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	$\eta$ Pas	$\Delta\eta$ Pas
víz							
bor							

A hőmérséklet.....

A víz sűrűségének meghatározása interpolálással

A víz viszkozitásának meghatározása interpolálással

Az ismeretlen viszkozitás kiszámítása

A viszkozitás hibájának kiszámítása a hibaterjedés alapján:

## Viszkózitás meghatározása Höppler-féle viszkóziméterrel különböző hőmérsékleten

### Rövid elméleti összefoglaló

Ha egy  $\eta$  viszkózitású,  $\rho$  sűrűségű folyadékban egy  $r$  sugarú golyó esik állandó  $v$  sebességgel, akkor a golyóra ható erők eredője nulla. A  $G$  súlyerő lefelé hat, az  $F_f$  felhajtó erő felfelé, és az  $F_k$  közegellenállási erő pedig szintén felfelé, mivel a golyó lefelé mozog. Az erők egyensúlya:  $F_k + F_f - G = 0$ . Ha a közegellenállási erő a Stokes-féle súrlódási erő:

$F_k = 6\pi r \eta v$ , és a felhajtó erő, a kiszorított folyadék súlya:  $F_f = \frac{4r^3 \pi}{3} \rho_{\text{folyadék}} g$ , ill. a golyó

súlya:  $G = \frac{4r^3 \pi}{3} \rho_{\text{golyó}} g$ . Felírva az erők egyensúlyát kifejező összefüggést:

$\frac{4r^3 \pi}{3} \rho_{\text{folyadék}} g + 6\pi r \eta v - \frac{4r^3 \pi}{3} \rho_{\text{golyó}} g = 0$ . A  $v$  sebességet meghatározhatjuk, ha a golyó esési

idejét mérjük két jel között; a két jel közötti távolságot osztjuk az esési idővel,  $v = s/t$ . A sebességet beírva a fenti egyenletbe a folyadék viszkózitása kifejezhető:

$\eta = \frac{2g(\rho_{\text{golyó}} - \rho_{\text{folyadék}})r^2}{9s} t$  A Stokes-törvény akkor érvényes, ha a golyó átmérője

összemérhető a folyadék molekuláinak méretével. A Höppler viszkóziméterben (30. ábra) a golyó átmérője sokkal nagyobb. Ha a golyót nedvesíti a folyadék, akkor lényegében a golyót körül vevő folyadék réteg molekulái gördülnek le a többi folyadék molekula között. Ezért a fenti összefüggés helyett a következő összefüggés érvényes:  $\eta = K(\rho_{\text{golyó}} - \rho_{\text{folyadék}})t$  A  $K$  egy golyóra és készülékre meghatározott konstans, amelyet gyárilag megadnak. A viszkózitás

függ a hőmérséklettől:  $\eta = Ae^{\frac{\Delta E}{RT}}$ ,  $A$  az egyenlet konstansa,  $e$  a természetes logaritmus alapja,  $\Delta E$  az aktiválási energia,  $R$  az általános gázállandó, és  $T$  az abszolút hőmérséklet.

### Eszközök

Höppler-féle viszkóziméter (30. ábra), Termosztát, Stopperóra, Mérendő folyadék

### A mérés és az értékelés menete

Az ismeretlen viszkózitású folyadék sűrűségének meghatározása

Az ismeretlen viszkózitású folyadék betöltése a viszkóziméter mérőcsövébe

A betöltésnél vigyázni kell arra, hogy ne legyen buborék a csőben

A méréshez használt golyó kiválasztása az átmérő alapján, behelyezése a folyadékba golyó mentes legyen minden zsírtól – a behelyezés előtt a golyót alaposan meg kell tisztítani és nem szabad kézzel érinteni

A termosztáttal a hőmérséklet beállítása négy különböző értékre

A golyó esési idejének mérése a megadott hőmérsékleteken.

A folyadék viszkózitásának meghatározása az egyes hőmérsékleteken

Az abszolút hőmérséklet reciprok értékének a függvényében a viszkózitás természetes alapú logaritmusának az ábrázolása

Regressziós egyenes illesztése

$A$  és  $\Delta E_a$  meghatározása

Értékelés

Kiadott folyadék viszkózitásának meghatározása különböző hőmérsékleten

$K = \dots\dots\dots$

$\rho_{\text{golyó}} = \dots\dots\dots$

t °C	T K	1/T 1/K	$\tau_1$ s	$\tau_2$ s	$\tau_3$ s	$\tau_{\text{átlag}}$ s	$\rho_{\text{folyadék}}$ kg/m <sup>3</sup>	$\eta$ Pas	$\ln \eta$

A vizsgált folyadék sűrűségének meghatározása különböző hőmérsékleten

Regressziós egyenes

Meredeksége

Tengelymetszete

$\ln A = \dots\dots\dots$

$A = \dots\dots\dots$

$\Delta E_a = \dots\dots\dots$

Számolt pontok

$1/T_1 = \dots\dots\dots$

$1/T_2 = \dots\dots\dots$

$\ln \eta_1 = \dots\dots\dots$

$\ln \eta_2 = \dots\dots\dots$

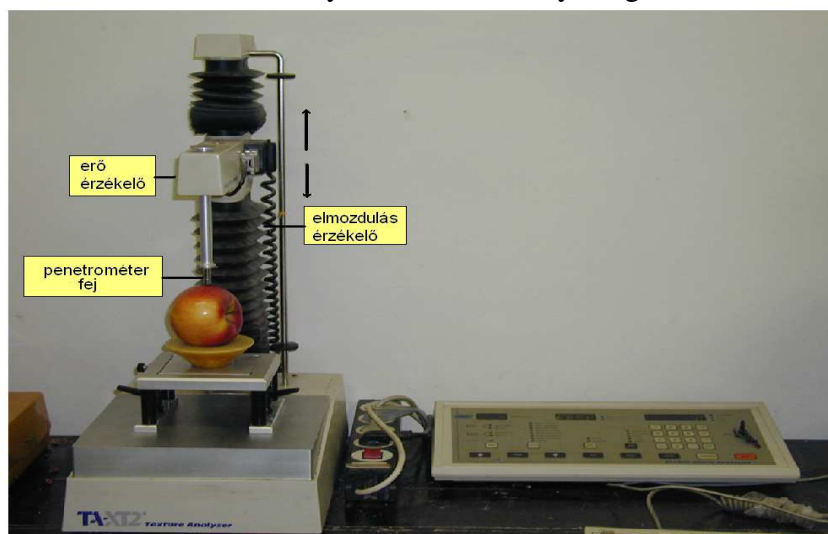
## 6. Élelmiszerek, zöldségek, gyümölcsök reológiája

Általában, ha egy zöldségre vagy egy gyümölcsre erő hat, akkor alakváltozás is bekövetkezik. Az alakváltozást leíró deformáció nem azonnal az erőhatás pillanatában alakul ki, hanem függ az időtől. Ez azt jelenti, hogy erőhatás alatt a vizsgált objektum részecskéi elmozdulnak egymáshoz képest – pl. az egyes sejt rétegek elcsúsznak, „elfolynak” egymáson. Az ilyen jellegű mozgásoknál fellépő erők és deformációk közötti törvények leírásával foglalkozik a reológia. A reológia szó a görög eredetű „reo”, folyás szóból származik és folyást jelent.

Az erő és a deformáció közötti kapcsolat függ az objektum keménységétől. A zöldségek és a gyümölcsök egyik fontos tulajdonsága a keménység. A keménység általában csökken az érés és a tárolás folyamán. A keménység meghatározza a szállítási és tárolási körülményeket. A keménységet sokszor felhasználják a minőség jellemzésére is.

Nagyon sokféle kísérleti módszer létezik a keménység meghatározására. Vannak statikus és dinamikus módszerek. Ebben a félévben főleg a statikus vizsgálatokkal ismerkedünk meg. Az egyik ismert és gyakran használt eljárás a penetrometria. A penetrometriás mérés során egy mérőfej, amely különböző alakú lehet – általában henger alakú – erőhatást gyakorol a vizsgált testre, mintegy behatolva a testbe.

Texture Analyser XT2 állományvizsgáló

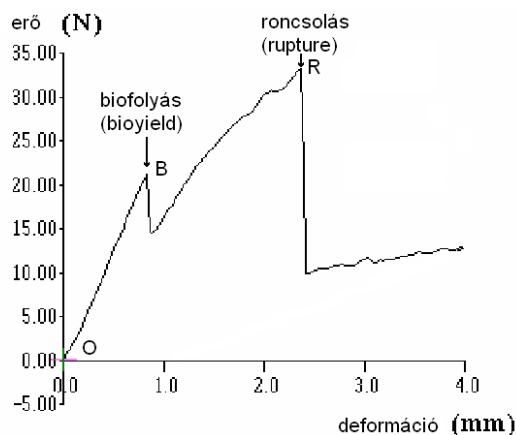


33. ábra TA XT2 állományvizsgáló műszer

A 33. ábrán látható egy állományvizsgáló, amely pl. egy 6 mm átmérőjű acélhenger (penetrométer) lefelé mozgatásával az alma deformációját és a deformációhoz szükséges erőt képes megmérni. A mérőfejhez egy erőmérő cella csatlakozik, és a mérőfej pontos elmozdulását szintén mérni lehet. Egyre nagyobb deformációnál egyre nagyobb erő lép fel, amint ez a 34. ábra „terhelő erő–deformáció” görbéjéből látható. A görbe első szakasza a kis kezdeti görbülettől eltekintve egy egyenes (O–B szakasz), amelyet merevedés csökkenés követ (B–R) szakasz, és végül az R pontnál hirtelen erő csökkenés figyelhető meg. A kezdeti kis görbült szakasznál a sík henger és a görbült alma felszín találkozik, és fokozatosan deformálódik az alma felszín. Az egyenes szakaszon az alma sejtek összenyomódnak, rugalmas alakváltozással felelnek a deformáló erő hatására. A B pontnál a sejtek elveszítik rugalmasságukat, és a sejthártyák szétroppannak, a szövet állomány elfolyósodik. Ezért ezt a pontot biofolyás határnak (angolul bioyield stress) nevezzük. Ezután a B-R szakaszon az

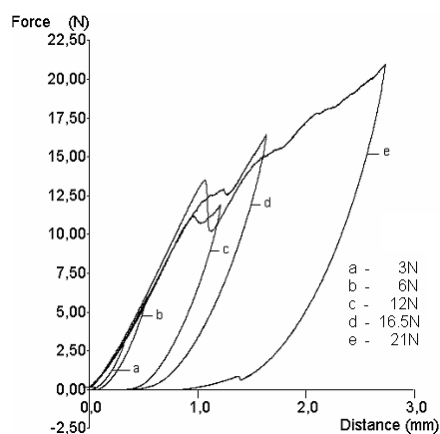


elfolyósodott almapép összenyomásához szükséges erőt mérjük. Az R pontban az alma héja is bereped. Ezt a pontot roncsolási határnak (angolul rupture stress) hívjuk. Az ábrán nem a feszültség (stress), hanem az erő (force) értékei láthatóak.



34. ábra Alma deformáció-erő görbéje 6 mm átmérőjű deformáló hengerrel

Ha a mérőfejet egy adott deformációig lefelé, az almába befelé mozgatjuk, majd azután felfelé mozgatjuk, és közben mérjük a deformációt és az erőt, akkor kapjuk a 35. ábrán látható görbesereget. Látható, hogy még nagyon kis deformációnál sem ugyanazokat a deformációkat és erőt mér a készülék a terhelés és a visszaterhelés során. Tehát a kis erőhatásokra fellépő deformációk sem teljesen reverzibilisek, nem teljesen rugalmasok. A jelenséget mechanikai hiszterézisnek nevezzük. A terhelő görbe alatti terület a befektetett teljes, vagy az összes munka. A visszaterhelő (tehermentesítő) görbe alatti terület a visszanyert, azaz a rugalmas munka. A terhelő és visszaterhelő görbe közötti hurok területe a visszamaradó, azaz az alakváltozási munka. A hiszterézis hurok területe kicsi, amíg a maximális deformáció a biofolyás határ alatt van, az elfolyósodott szövet esetén rohamosan nő a hiszterézis hurok területe.



35. ábra Alma mechanikai hiszterézis görbéi különböző deformációknál

A 33. ábrán látható görbe kezdeti egyenes szakaszának a meredeksége arányos az almaszövet rugalmassági modulusával. Hooke-törvény szerint egy „A” keresztmetszetű, „l” hosszúságú egyik végén rögzített hasáb  $\Delta l$ -vel való összenyomásához szükséges erő

$$F = E \frac{\Delta l}{l} A,$$

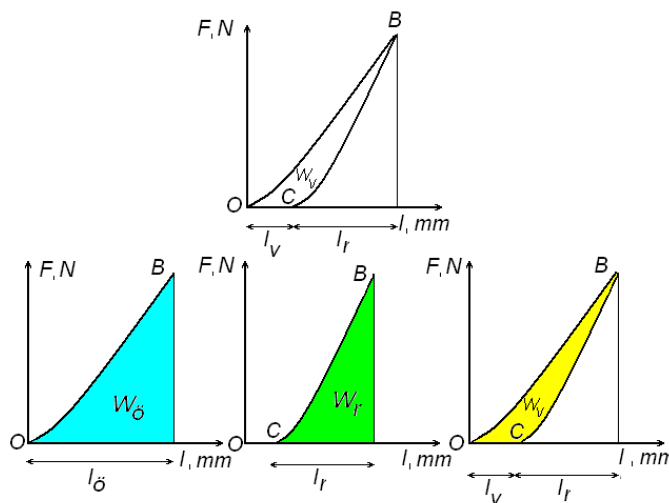
ahol  $E$  a hasáb rugalmassági modulusa, ill. bevezetve a  $\sigma = \frac{F}{A}$  nyomó feszültséget és az  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$  relatív deformációt

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Ismerve az alma átmérőjét ( $l$ ) és a mérőfej átmérőjét ( $d$ ), mérve az erőt ( $F$ ) és a deformációt ( $\Delta l$ ), az alma rugalmassági modulusa számítható.

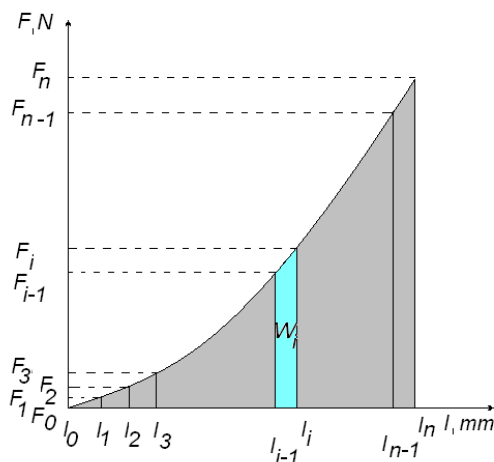
$$E = \frac{F l}{\Delta l A},$$

ahol az  $\frac{F}{\Delta l}$  hányados a görbe egyenes szakaszának meredeksége és  $A = \frac{d^2}{4} \pi$ .



36. ábra Mechanikai hiszterézis, görbe alatti területek

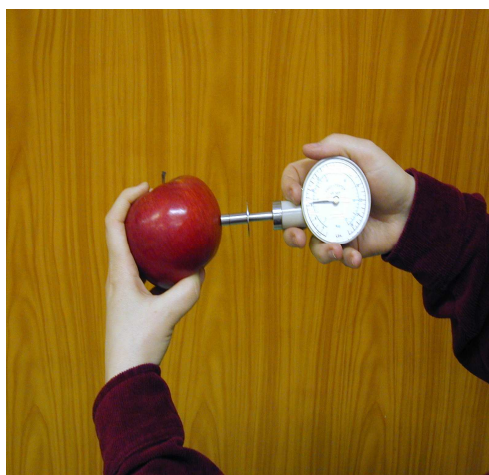
A hiszterézis görbékből (36. ábra) az összes, vagy befektetett munka:  $W_{\delta} = \int_0^B F(l)dl$ , a rugalmas, vagy visszanyert munka:  $W_r = \int_C^B F(l)dl$ . A hiszterézis hurok területe a visszamaradó, alakváltozási munka  $W_v = W_{\delta} - W_r$ , a rugalmassági fok, pedig  $\frac{W_r}{W_{\delta}} = \frac{W_r}{W_r + W_v}$ .



37. ábra Görbe alatti terület számítása, trapéz területek összegével

A görbe alatti terület kiszámításához (37. ábra) osszuk be a vízszintes tengelyen a deformáció szakaszt egyenlő részekre. Az  $i$ -ik rész hossza  $l_i - l_{i-1}$ , a hozzá tartozó két erő  $F_i$  és  $F_{i-1}$ . Feltételezve, hogy e két erő között az erő lineárisan változik, a munka, amíg a deformáció  $l_{i-1}$ -ről  $l_i$ -re változik  $W_i = \frac{F_i + F_{i-1}}{2} (l_i - l_{i-1})$ , egy trapéz területe. A teljes görbe alatti terület az egyes  $W_i$  munkák összege:  $W_{\delta} = \sum_i W_i$ .

### Kézi penetrométer



38. ábra Kézi penetrométer

A kézi penetrométerrel (38. ábra) csak roncsolási határt lehet megállapítani. Egy acélhengert kell a gyümölcsbe belenyomni. A műszer a legnagyobb erő értékét mutatja a roncsolás során. Általában két skála van a műszeren, az egyik angol font-ban (tévesen Lbs-nek írták; a jele lbf volt), a másik kp-ban méri az erőt (a kilopond alapmértékegység volt a műszaki-technikai mértékegységrendszerben, tévesen kg-ként feliratozták). Az átszámítás N-ba:

$$1 \text{ Lbs} = 4,448222 \text{ N}$$

$$1 \text{ kp} = „1 \text{ kg}” = 9,80665 \text{ N}.$$

A behatoló fej, roncsoló fej átmérője:

$$d = 5/16'' = 7,9375 \text{ mm}$$

$$d = 7/16'' = 11,125 \text{ mm}.$$

### Elektronikus kézi penetrométer



39. ábra Elektronikus kézi penetrométer

A tanszéken fejlesztették ki az elektronikus kézi penetrométert (39. ábra). Itt a behatolás mélységét, azaz a deformációt előre be lehet állítani (lehetőleg a biofolyáshatár alatt). Ehhez a deformációhoz tartozó erőt mérjük a kézi penetrométerrel. A deformációt és az erőt egy mikroprocesszoros adat tárolóba lehet rögzíteni és a kiolvasás, ill. adatfeldolgozás már számítógéppel történik. Előnye, hogy biológiai folyáshatár alatt a deformáció nem okoz maradandó alakváltozást, így ugyanazon a gyümölcsön sokszor lehet mérni, akár a fán érés során, akár tárolás során.

### Finométer

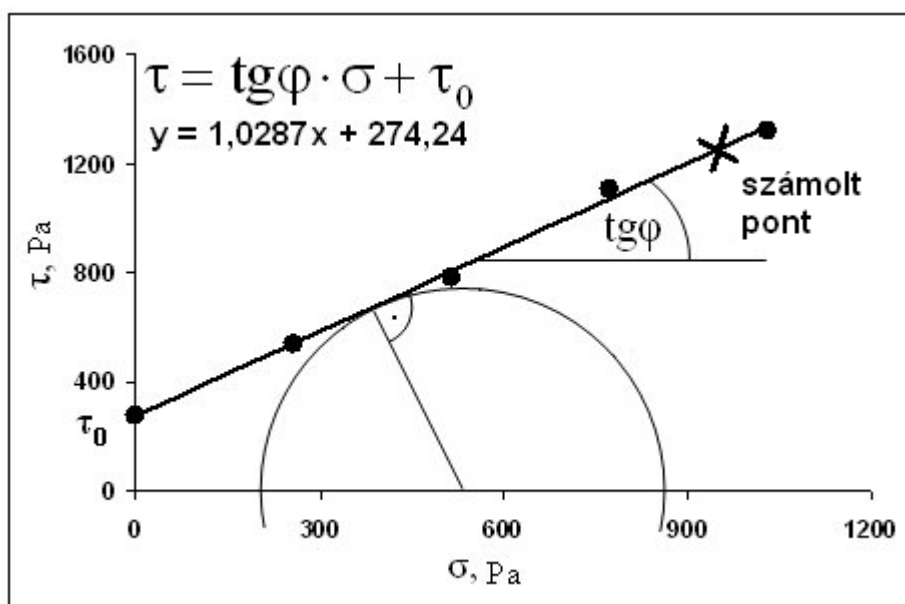
A finométert zöldborsó zsengeségének vizsgálatára fejlesztették ki. Egy edénybe kell a zöldborsót behelyezni. Az edény tetejét rögzíteni kell, majd a forgatókar segítségével a roncsoló tűskéket (hengereket) kb. 6 másodperc alatt kell egyenletesen az edénykébe hajtani. Közben a zöldborsó szemek összeroncsolódnak. Az ehhez szükséges erőt méri a műszer. Az erő mérésének elvi alapja ugyanaz, mint a kézi penetrométernél. A leolvasás finométer fokban történik. A műszer az amerikai tenderométerek mintájára készült

### Plasztikus törés vizsgálata, nyíródoboz

Halomban tárolt terményeknél, pl. gabonáknál az egyes szemek között kohéziós erők, és súrlódási erők lépnek fel. Ezek az erők, illetve egységnyi felületre vonatkoztatva főfeszültségek a külső erőkkel, illetve feszültségekkel egyensúlyt tartanak bizonyos körülmények között. A Mohr-féle szilárdsági elmélet alapján az anyag belsejében ébredő minden főfeszültség párhoz tartozik egy Mohr-kör, amelyen belül levő nyíró és nyomó feszültségek esetén a nyugalom még fenn tartható. A Mohr-körök érintője a Coulomb egyenes:

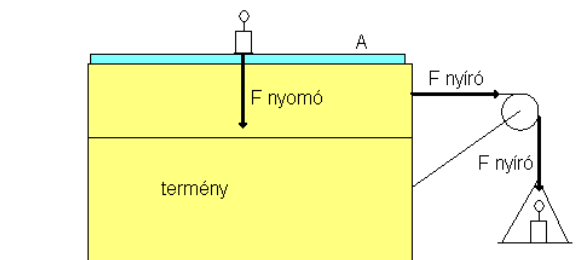
$$\tau = \sigma \operatorname{tg}\Phi + \tau_0,$$

$\sigma$  a külső nyomó feszültség, és  $\tau$  a külső nyíró feszültség. Köztük lineáris összefüggés van.  $\operatorname{tg}\Phi$  az egyenes meredeksége, a belső súrlódási szög tangense,  $\tau_0$  a kohézió. Az összetartozó  $\sigma$  és  $\tau$  pont párok által meghatározott nyomó és nyíró feszültségeknél az egyensúly még éppen fenn tartható.



Ha meghatározzuk a különböző nyomó feszültségekhez tartozó egyensúlyi nyíró feszültségeket, és a  $\sigma$  függvényében ábrázoljuk a  $\tau$  értékeket, akkor a pontokra regresszió

számítással egy egyenest lehet illeszteni, amelynek meredeksége megadja a belsőúrlódási szög tangensét és tengelymetszete pedig a kohéziót. Ehhez a méréshez nyíródobozt (Jenike-féle készülék) lehet használni (40. ábra).



40. ábra Nyíródoboz vázlatos ábrája

Az „A” keresztmetszetű doboz felső része egy keret, amely el tud csúszni a doboz alsó részén. A felső részhez egy kötélt csatlakozik, amelyet húzva nyíró erőt tudunk kifejteni a keret és a doboz érintkezési síkjában levő „A” felületű terményrétegre. A dobozt a rá helyezett kerettel együtt megtöltjük a mérendő anyaggal (pl. búzaszemekkel). A termény tetejére helyezünk az „A” felületű lapot. Erre a nyomó súlyt tesszük. A csiga lehetővé teszi, hogy a vízszintes nyíró erőt a tányérra helyezett tömegek függőlegesen ható súlyával érzük el. Ezután a csigához kapcsolódó tányérra súlyokat kezdünk helyezni. Addig növeljük a nyíró erőt 10 g-onként, amíg a keret meg nem csúszik. Különböző nyomó súlyok esetén meghatározzuk a megcsúszáshoz szükséges nyíró erőket. Kiszámítjuk a nyomó és nyíró feszültségeket, és a nyomó feszültségek függvényében a nyíró feszültségeket ábrázoljuk. A pontokra regressziós egyenest illesztünk. Kiszámítjuk  $tg\Phi$  és  $\tau_0$  értékét.

#### ***A mérés menete és feladatok***

Héjas és hámozott alma felületén öt-öt lyukasztást készítünk a kiadott kézi penetrométerrel. Kiszámítjuk a mind héjas, mind hámozott almák roncsolásához szükséges erők átlagát, szórását és az átlag szórását. Meghatározzuk a héjas és a hámozott alma roncsolási feszültségét a penetrométer fej átmérőjének ismeretében.

A kiadott erő-deformáció görbéről leolvastva az adatokat, meghatározzuk a rugalmassági modulust, a biofolyás határhoz és a roncsoláshoz tartozó feszültségeket.

A kiadott táblázatos adatokat mm-papíron ábrázolva meghatározzuk a terhelő görbe, tehermentesítő görbe alatti területet, a mechanikai hiszterézist és a rugalmassági fokot.

## ***Erő-deformáció görbe jellemzése, hiszterézis görbe vizsgálata***

### **Rövid elméleti összefoglaló**

Ha egy zöldségre vagy egy gyümölcsre erő hat, akkor alakváltozás is bekövetkezik. Az alakváltozást leíró deformáció nem azonnal az erőhatás pillanatában alakul ki, hanem függ az időtől. Az erők és a deformációk közötti törvények leírásával foglalkozik a reológia. A reológia szó a görög eredetű „reo”, folyás szóból származik és folyástant jelent. Az erő és a deformáció közötti kapcsolat függ az objektum keménységétől. A zöldségek és a gyümölcsök egyik fontos tulajdonsága a keménység. A keménység általában csökken az érés és a tárolás folyamán. A keménység meghatározza a szállítási és tárolási körülményeket. A keménységet sokszor felhasználják a minőség jellemzésére is.

A TA-XT2 állományvizsgáló készülék egyidejűleg méri a deformációt, az erőt és az időt. Egy héjas alma esetén egy 6 mm átmérőjű fejjel mérve az erőt és a deformációt, olyan görbét kapunk (33. ábra), amelynek a kezdeti szakasza egyenes – itt rugalmas alakváltozással felel az objektum a deformáló erőre. Majd az egyenes meredeksége csökken, itt már az erő hatására elfolyósodnak a sejtek, ezt a pontot biofolyás határnak nevezik. Ezután a görbe meredeksége jelentősen csökken és általában nem állandó, majd az alma héja is bereped. Ez a roncsolási határ.

A  $F = E \frac{\Delta l}{l} A$  Hooke-törvényt alkalmazva az almára, az alma rugalmassági modulusa,  $E$ , meghatározható. Ha az alma átmérője (eredeti hossz),  $l$ , a mérőfej keresztmetszete  $A$ , és a ható erő  $F$ , és mérjük a deformációt,  $\Delta l$ -t, akkor  $E = \frac{F l}{\Delta l A}$ , ahol az  $\frac{F}{\Delta l}$  hányados a görbe egyenes szakaszának meredeksége. A meredekséget két pont koordinátájának leolvasásával meghatározzuk:  $\frac{F}{\Delta l} = \frac{F_2 - F_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1}$ .

A terhelő és tehermentesítő erő (biofolyás határ alatt) - deformáció görbék felvételével kapjuk a hiszterézis görbét (34. ábra). A 35 ábra alapján a befektetett munka:  $W_\delta = \int_0^B F(l)dl$ , a rugalmas, vagy visszanyert munka:  $W_r = \int_C^B F(l)dl$ . A hiszterézis hurok területe a visszamaradó, alakváltozási munka  $W_v = W_\delta - W_r$ , a rugalmassági fok, pedig  $\frac{W_r}{W_\delta} = \frac{W_r}{W_r + W_v}$ . A görbe alatti terület kiszámítása (36. ábra) a  $W_i = \frac{F_i + F_{i-1}}{2} (l_i - l_{i-1})$ , trapéz területek összege. A terhelő görbe alatti terület az egyes  $W_i$  munkák összege:  $W_\delta = \sum_i W_i$ . Hasonlóan lehet számítani a tehermentesítő görbe alatti területet.

### **Eszközök**

- Erő-deformáció görbe
- Hiszterézis görbe

### **A görbék értékelésének menete**

- Biofolyás és roncsolás határok leolvasása (erő és deformáció)
- Erő-deformáció görbe egyenes szakaszán a meredekség meghatározása
- Alma átmérőjének és a mérőfej átmérőjének ismeretében az alma rugalmassági modulusának a meghatározása
- Hiszterézis görbénél a teljes és a rugalmas munka kiszámítása
- Rugalmassági fok kiszámítása



## Roncsolási erő és feszültség meghatározása kézi penetrométerrel

### Elméleti összefoglaló

A kézi penetrométerrel (37. ábra) csak roncsolási határt lehet megállapítani. Egy acélhengert kell a gyümölcsbe belenyomni. A műszer a legnagyobb erő értékét mutatja a roncsolás során. Általában két skála van a műszeren, az egyik angol font-ban ( Lbs-nek írták; a jele lbf hivatalosan), a másik kp-ban méri az erőt (a kilopond alapegység volt a műszaki-technikai mértékegységrendszerben, sokszor kg-ként feliratozzák). Az átszámítás N-ba:

$$1 \text{ Lbs} = 4,448222 \text{ N}$$

$$1 \text{ kp} = „1 \text{ kg}” = 9,80665 \text{ N.}$$

A behatólő fej, roncsoló fej átmérője:

$$d = 5/16” = 7,9375 \text{ mm}$$

$$d = 7/16” = 11,125 \text{ mm.}$$

### Eszközök

Kézi penetrométer

Alma

Kés a hámozáshoz

### A mérés menete

Héjas almán öt lyuk és hámozott almán is öt lyuk.

A mérőfej átmérője:.....

A mérőfej keresztmetszete:.....

	Erő $F$ , N	Erő átlaga $\bar{F}$ , N	Erő szórása $s$ , N	Erő átlagának szórása $\sigma_{\bar{F}}$ , N	Roncsolási feszültség $\sigma$ , Pa
Héjas alma					
Hámozott alma					



## ***A plasztikus törés vizsgálata nyíródobozzal***

### **Rövid elméleti összefoglaló**

Halomban tárolt terményeknél, pl. gabonáknál az egyes szemek között kohéziós erők, és súrlódási erők lépnek fel. Ezek az erők, illetve egységnyi felületre vonatkoztatva főfeszültségek a külső erőkkel, illetve feszültségekkel egyensúlyt tartanak bizonyos körülmények között. A Mohr-féle szilárdsági elmélet alapján az anyag belsejében ébredő minden főfeszültség párhoz tartozik egy Mohr-kör, amelyen belül levő nyíró és nyomó feszültségek esetén a nyugalom még fenn tartható. A Mohr-körök érintője a Coulomb egyenes:  $\tau = \sigma \operatorname{tg}\Phi + \tau_0$ ,  $\sigma$  a külső nyomó feszültség, és  $\tau$  a külső nyíró feszültség. Közöttük lineáris összefüggés van.  $\operatorname{tg}\Phi$  az egyenes meredeksége, a belső súrlódási szög tangense,  $\tau_0$  a kohézió. Az összetartozó  $\sigma$  és  $\tau$  pont párok által meghatározott nyomó és nyíró feszültségeknél az egyensúly még éppen fenn tartható.

Ha meghatározzuk a különböző nyomó feszültségekhez tartozó egyensúlyi nyíró feszültségeket, és a  $\sigma$  függvényében ábrázoljuk a  $\tau$  értékeket, akkor a pontokra regresszió számítással egy egyenest lehet illeszteni, amelynek meredeksége megadja a belső súrlódási szög tangensét és tengelymetszete pedig a kohéziót. Ehhez a méréshez nyíródobozt (Jenike-féle készülék) lehet használni (39. ábra).

### **Eszközök**

- Nyíródoboz
- Vizsgálendő anyag (sárgaborsó, rizs, stb.)
- Súlysorozat

### **A mérés és az értékelés menete**

- A doboz összeállítása – a keret felhelyezése
- A termény beleöntése a dobozba
- A felület elsimítása
- A nyomó lap ráhelyezése
- Nyomósúly ráhelyezése a nyomólapra
- Nyíró súlyok fokozatos felhelyezése a mérlegtányérra
- A megcsúszást okozó nyíró erő feljegyzése
- Egy nyomósúlynál három nyíró erő meghatározása a doboz mindenkori újratöltésével
- Öt különböző nyomósúly esetén három-három nyíró erő meghatározás
- Nyomó és nyíró feszültségek meghatározása
- Nyíró feszültség ábrázolása a nyomó feszültség függvényében
- Regressziós egyenes illesztése
- Meredekség, belső súrlódási szög meghatározása
- Tengelymetszet, kohézió meghatározása
- Még egyensúlyban levő nyomó és nyíró feszültség pont-pár megadása

## Termény kohéziójának és belső súrlódásának meghatározása

A nyíró, ill. a nyomó felület nagysága:  $A = \dots\dots\dots$ 

Nyomótömeg $m_{nyomó}$ , kg	Nyomótömeg $m_{nyíró}$ , kg	Nyomólap felülete $A$ , m <sup>2</sup>	Nyomóerő $F_{nyomó}$ , N	Nyíróerő $F_{nyíró}$ , N	Nyomófeszültség $\sigma$ , Pa	Nyírófeszültség $\tau$ , Pa

Regressziós egyenes

Meredeksége

Tengely metszete

Belső súrlódási szög tangense:  $\dots\dots\dots$ Belső súrlódási szög:  $\dots\dots\dots$ 

Számolt pontok

Nyomó feszültség:  $\sigma_1 = \dots\dots\dots$  $\sigma_2 = \dots\dots\dots$ nyíró feszültség:  $\tau_1 = \dots\dots\dots$  $\tau_2 = \dots\dots\dots$

## 7. Optikai mérések

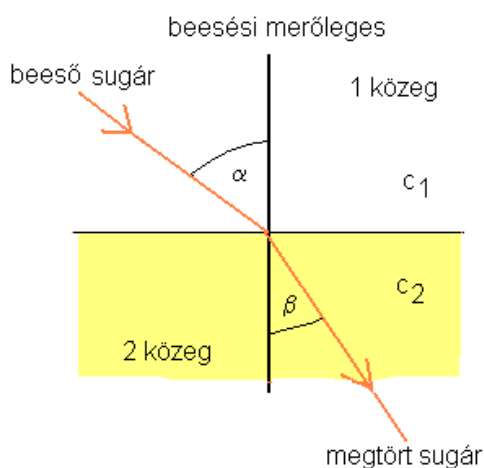
### Törésmutató meghatározása

#### Fénytörés (refrakció)

A fénysugár homogén közegben egyenes vonalban terjed, új közeghez érve megváltozik a fénysugár terjedési iránya (41. ábra). Ezt a jelenséget nevezzük fénytörésnek. A fénytörés mértékét a törésmutató adja meg. A „2” közeg „1” közegre vonatkoztatott törésmutatója,  $n$ :

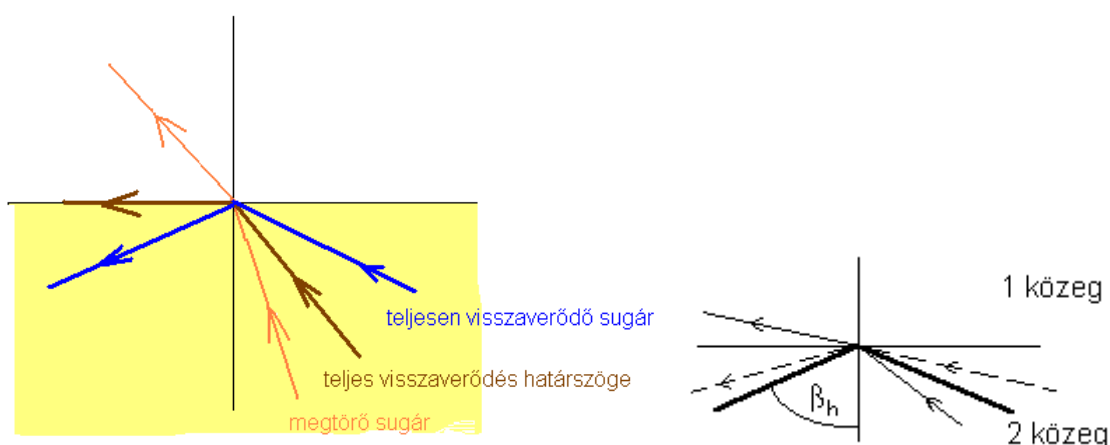
$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2},$$

ahol  $\alpha$  a beesési szög,  $\beta$  a törési szög,  $c_1$  és  $c_2$  a fény terjedési sebessége az „1” és „2” közegben.



41. ábra Fénytörés, törésmutató definíciója

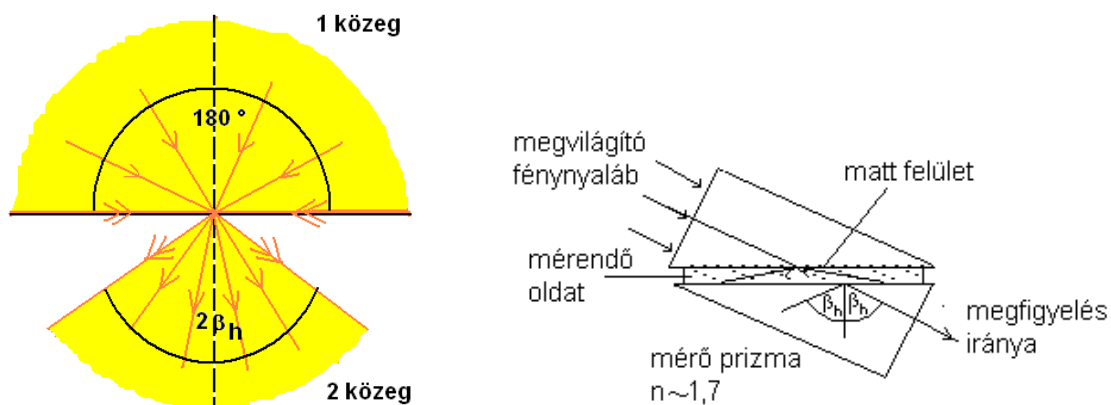
A fenti ábrán az  $\alpha$  szög nagyobb, mint a  $\beta$  szög, ilyenkor azt mondjuk, hogy az „1” közeg optikailag ritkább, mint a „2” közeg. Ha a fény optikailag sűrűbb közegből megy optikailag ritkább közegbe, akkor lesz egy olyan beesési szög,  $\alpha_h$ , amelynél a törési szög éppen  $90^\circ$ . Ha ennél nagyobb a beesési szög, akkor a fénysugár teljes visszaverődést szenved (42. ábra).



42. ábra A teljes visszaverődés határszöge

Ha optikailag ritkább („1” közeg) közegből megy a fény optikailag sűrűbb („2” közeg) közegbe, akkor az „1” közegben a teljes féltérből ( $180^\circ$ -ból) érkező sugarak a „2” közegben egy  $2\beta_h$  nyílásszögű kúp mentén terjednek (43.A ábra). Lényegében ezt az elrendezést

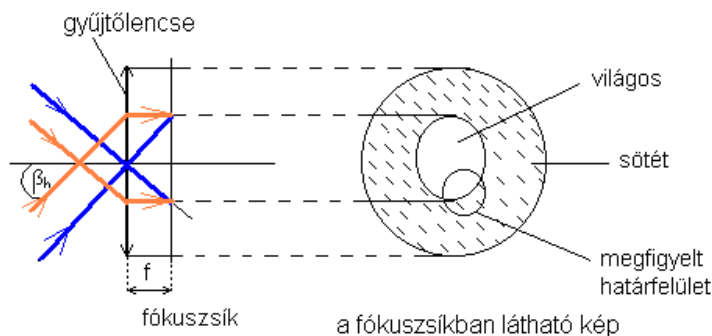
valósítják meg prizmás törésmutató mérő eszközök, pl. az Abbé-féle refraktométer (43.B ábra).



43. ábra A. Sugármenet optikailag ritkább közegből optikailag sűrűbb közegbe  
B Abbé-féle refraktométer megvilágító és mérő prizmája, közöttük a vizsgálendő folyadék.

#### **Oldatok, folyadékok törésmutatójának mérése Abbe-féle refraktométerrel**

A refraktométerben két prizma helyezkedik el (43.B ábra). A két prizma között vékonyrétegben helyezkedik el a vizsgálendő oldat. Az felső a megvilágító prizma, amelynek a folyadékkal érintkező felülete matt. Ezt a prizmat megvilágítva a matt felületen keresztül minden irányba kerül fénysugár a vizsgálendő oldatba. Az oldat alatt helyezkedik el a mérő prizma, amelynek a törésmutatója nagy (1,5-1,7). Az oldatból a fény  $180^\circ$  szögben lép be a mérőprizmába, de a fénytörés miatt csak  $2\beta_h$  nyílásszögű kúpban halad tovább a prizmában. Ezt a sugármenetet képezik le egy gyűjtőlencsével a lencse fókusz síkjára, ahol egy világos kör a látómező közepén, és egy sötét körgyűrű a látómező szélén jön létre.



44. ábra Az Abbé-féle refraktométerben a mérőprizmát elhagyó fénysugarak leképezése egy gyűjtő lencsével.

A fókusz síkban képződő világos és sötét terület határfelületét figyeljük meg egy távcsövön keresztül. A világos mező átmérője növekszik, ha a  $\beta_h$  szög értéke nő. Ha a távcsőben egy skálát is elhelyezünk, akkor a  $\beta_h$  értéke, vagy közvetlenül a törésmutató értéke olvasható le. Általában a törésmutató skála mellett egy másik skála is látható, amelyik a törésmutatónak megfelelő szárazanyag-tartalmat mutatja %-ban. (Ez az összetételi aránynak régebben elterjedt mértékegységére vonatkozik, és  $\text{kg/m}^3$ -ből számították.)

Törésmutató mérésének gyakorlati alkalmazása: megfelelő hitelesítés után

- oldatok törésmutatójának mérése, a törésmutató értékéből az oldat koncentrációját lehet meghatározni
- növényi zsírok, olajok törésmutatójának mérése, a törésmutató értékéből a tisztasági fokot lehet meghatározni

- szuszpenziók törésmutatójának mérése, a törésmutató értékéből a szárazanyag tartalmat lehet meghatározni.

Az anyagok törésmutatójának az értéke erősen függ a hőmérséklettől, ezért a refraktométerekben (törésmutató-mérőkben) a mérendő anyag hőmérsékletét termosztálással állandó értéken tartják. A leolvasott szárazanyag-tartalmat a hőmérséklet értékének megfelelően korrigálni kell a mellékelt korrekciós táblázat segítségével: a meghatározott szárazanyag tartalomhoz és hőmérsékletéhez tartozó táblázati értéket az eredményhez hozzá kell adni. A törésmutató értékét nem kell korrigálni.

Korrekciós táblázat refraktométer adatának helyesbítésére											
Hőmérséklet °C	Szárazanyagtartalom százalékban										
	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
8	-0,58	-0,62	-0,68	-0,71	-0,75	-0,78	-0,81	-0,83	-0,86	-0,87	-0,88
9	-0,54	-0,58	-0,63	-0,66	-0,70	-0,72	-0,75	-0,77	-0,79	-0,80	-0,81
10	-0,50	-0,54	-0,58	-0,61	-0,64	-0,66	-0,68	-0,70	-0,72	-0,73	-0,74
11	-0,46	-0,49	-0,53	-0,55	-0,58	-0,60	-0,62	-0,64	-0,65	-0,66	-0,67
12	-0,42	-0,46	-0,48	-0,50	-0,52	-0,54	-0,56	-0,57	-0,58	-0,59	-0,61
13	-0,37	-0,40	-0,42	-0,44	-0,46	-0,48	-0,49	-0,50	-0,51	-0,52	-0,53
14	-0,33	-0,35	-0,37	-0,39	-0,40	-0,41	-0,42	-0,43	-0,44	-0,45	-0,45
15	-0,27	-0,29	-0,31	-0,33	-0,34	-0,34	-0,35	-0,36	-0,37	-0,37	-0,38
16	-0,22	-0,24	-0,25	-0,26	-0,27	-0,28	-0,28	-0,29	-0,30	-0,30	-0,30
17	-0,17	-0,18	-0,19	-0,20	-0,20	-0,21	-0,21	-0,22	-0,22	-0,23	-0,23
18	-0,12	-0,13	-0,13	-0,14	-0,14	-0,14	-0,14	-0,15	-0,15	-0,15	-0,15
19	-0,06	-0,06	-0,06	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,08	-0,08	-0,08	-0,08
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
21	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
22	0,13	0,13	0,14	0,14	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,16	0,16
23	0,19	0,20	0,21	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24
24	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,30	0,31	0,31	0,31	0,31	0,32
25	0,33	0,35	0,36	0,37	0,38	0,38	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40
26	0,40	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,48	0,48	0,48
27	0,48	0,50	0,52	0,53	0,54	0,55	0,55	0,56	0,56	0,56	0,56
28	0,56	0,57	0,60	0,61	0,62	0,63	0,63	0,64	0,64	0,64	0,64
29	0,64	0,66	0,68	0,69	0,71	0,72	0,72	0,73	0,73	0,73	0,73
30	0,72	0,74	0,77	0,78	0,79	0,80	0,80	0,81	0,81	0,81	0,81
31	0,81	0,83	0,86	0,87	0,88	0,89	0,89	0,89	0,89	0,90	0,90
32	0,89	0,91	0,94	0,95	0,97	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,98
33	0,97	1,00	1,03	1,05	1,07	1,08	1,08	1,08	1,09	1,09	1,09
34	1,06	1,09	1,12	1,14	1,16	1,18	1,18	1,18	1,19	1,19	1,19
35	1,16	1,19	1,21	1,24	1,26	1,28	1,28	1,28	1,29	1,29	1,29
36	1,26	1,28	1,31	1,34	1,36	1,38	1,38	1,38	1,39	1,39	1,39
37	1,36	1,38	1,41	1,44	1,46	1,48	1,48	1,48	1,49	1,49	1,49
38	1,46	1,48	1,51	1,54	1,56	1,58	1,58	1,58	1,59	1,59	1,59
39	1,56	1,58	1,61	1,64	1,66	1,68	1,68	1,68	1,69	1,70	1,70
40	1,66	1,68	1,71	1,74	1,77	1,78	1,78	1,78	1,79	1,80	1,80
41	1,77	1,79	1,82	1,85	1,87	1,89	1,89	1,89	1,89	1,90	1,90
42	1,87	1,90	1,92	1,95	1,97	1,99	1,99	2,00	2,00	2,01	2,01
43	1,97	2,00	2,03	2,06	2,08	2,10	2,10	2,11	2,11	2,12	2,12

A moláris refrakció:  $R = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{M}{\rho}$ , ahol  $n$  a törésmutató,  $M$  a molekula tömeg,  $\rho$  a sűrűség.

Az IUPAC változatában:  $R = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} V_M$ , ahol  $V_M$  a moláris térfogat.

A törésmutató függ a megvilágító fény hullámhosszától. Általában a Na D vonalára adják meg az  $n$  értékét. A Na D vonala 589 nm hullámhosszú fény. Általában a törésmutató értéke csökken, ha nő a hullámhossz abban a spektrális tartományban, ahol az anyag nem nyel el fényt. Abban a spektrális tartományban, ahol az anyagnak az abszorpciója, ott a törésmutató értéke jelentősen nő a hullámhossz növelésével.

Az Abbé-féle törésmutató mérőknél lehetőség van arra, hogy a sötét-világos határvonalat korrigáljuk a színi eltérésre egy akromatikus prizmapár segítségével.

Mivel a törésmutató értéke függ a fény frekvenciájától, illetve hullámhosszától, ezért a törési szög is függ a hullámhossztól. Ezt a jelenséget használják fel a spektroszkópiában, hogy az összetett fehér fény hullámhossz – szín – szerinti felbontását létrehozzák.

A laboratóriumban használatos RL2 refraktométernél a diszperzió Abbe-féle számát a 41-es felirat közelében találjuk.

### ***A mérés menete***

Először a refraktométer mérőprizmájára vizet cseppentünk, majd rázárjuk a megvilágító prizmat, (összenyomjuk a két prizmat). Beállítjuk a világos-sötét határvonalat az okulár fonal keresztjére. Ellenőrizzük, hogy a mérő skálán a törésmutató 1,333, ill. a szárazanyag tartalom 0 %. Ezután szétnyitjuk a két prizmat, kitöröljük papír zsebkendővel a vizet, és a mérendő oldatot cseppentjük a mérő prizma. Megint beállítjuk a világos-sötét határvonalat a fonal keresztre, és leolvassuk a törésmutatót, ill. a szárazanyag tartalmat.

### ***Feladatok***

Először ellenőrizzük, hogy a víz törésmutatója 1,333, ill. szárazanyag tartalma 0 %, majd megmérjük a különböző koncentrációjú oldatok törésmutatóját. Ábrázoljuk mm-papíron a törésmutatót a koncentráció függvényében, regressziós egyenest illesztünk a mérési pontokra. Meghatározzuk az illesztett egyenes konstansait, és kiszámítjuk az ismeretlen koncentrációt.

Ha a műszer prizmat tisztára töröltük, és mégsem mutat nullát, az azt jelenti, hogy kalibrálási hibája van (rendszeres hiba). Emiatt a mérési eredményeket azonos nagyságú, de ellentétes előjelű értékkel korrigálni kell.

## **Színmérés**

A szín mérése az emberi szem színérzékeléséhez igazított módszerekkel történik. A Commission Internationale de l'Éclairage 1931-ben elfogadta az emberi színlátáson alapuló trikrómikus színérzéketi mérőszámokat (színinger-összetevőket):

X (vörös) 700 nm

Y (zöld) 546,1 nm

Z (kék) 435,8 nm

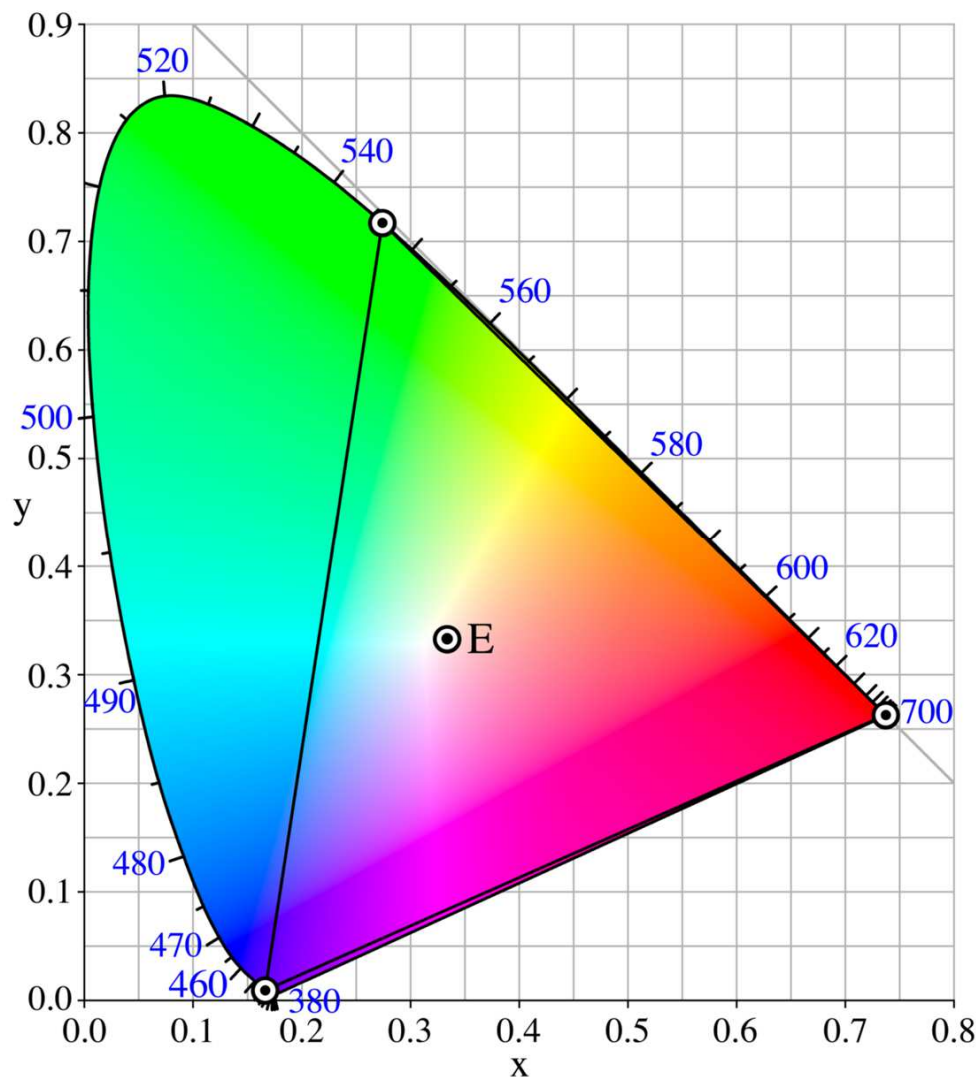
A színinger-összetevőkből a színkoordinátákat a következő összefüggések alapján lehet kiszámítani:

$$x = \frac{X}{X+Y+Z}$$

$$y = \frac{Y}{X+Y+Z}$$

$$z = \frac{Z}{X+Y+Z}$$

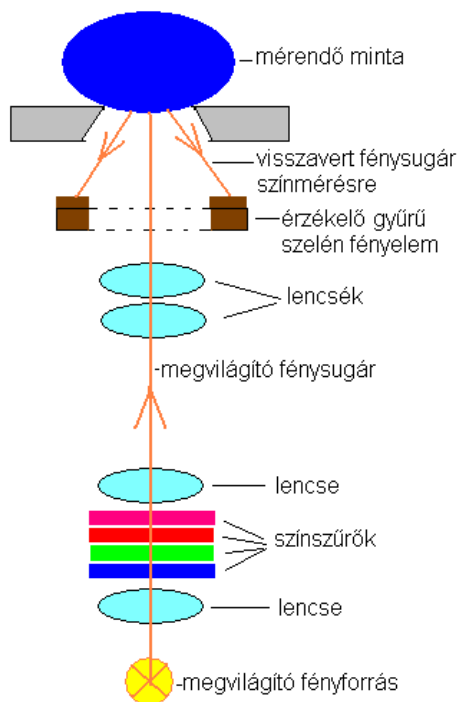
Ezek összege 1, ezért elegendő kettőt megadni. Az Y a világossági információt hordozza.



45. ábra CIE x, y színdiagram

A CIE x-y színdiagram tartalmazza a spektrumszíneket és a kevert színeket. A tiszta spektrum színek a görbe vonalon vannak feltüntetve. A 45. ábrán fekete vonallal jeleztük az alapszíningerek által kifesztett gamut helyét. A különböző (nem tiszta) spektrumszínek a színdiagram egyes pontjai. Az „E” pont jelzi a „fehér” színt:  $x=0,333314$  és  $y=0,333288$ .

A MOMCOLOR színmérő (46. ábra) tristimulusos, azaz a vörös, a zöld és a kék színinger összetevőket határozza meg a mért objektum felületéről visszaverődött fényben. A megvilágítás a mért felületre merőlegesen érkezik, a visszavert (színmérésre felhasznált) sugárzás  $45^\circ$ -ban figyelhető meg. A vörös színinger összetevőt két különböző vörös szűrővel határozza meg a műszer, a zöld és kék összetevőket egy-egy szűrővel. A mérendő felületről visszavert fényt egy gyűrű alakú szelén fényelemmel méri.



46. ábra MOMCOLOR vázlatos felépítése

Az X, Y, és Z értékekből a CIELAB színjellemzőket a következőképpen lehet meghatározni:

$$a^* = 500 \left[ \left( \frac{X}{X_o} \right)^{\frac{1}{3}} - \left( \frac{Y}{Y_o} \right)^{\frac{1}{3}} \right]$$

$$b^* = 200 \left[ \left( \frac{Y}{Y_o} \right)^{\frac{1}{3}} - \left( \frac{Z}{Z_o} \right)^{\frac{1}{3}} \right]$$

$$L^* = 116 \left( \frac{Y}{Y_o} \right)^{\frac{1}{3}} - 16$$

Az  $a^*$  a vörös-zöld, a  $b^*$  a kék-sárga színezetre jellemző, az  $L^*$  a világossági tényező. Az  $X_o$ ,  $Y_o$  és  $Z_o$  értékek a fehérpont (E) adatai, rendre 98,07, 100,0 és 118,22.

A MOMCOLOR a mért X, Y és Z értékekből meg tudja határozni az x, y, z, és  $a^*$ ,  $b^*$  és  $L^*$  értékeket.

A CIELAB színínger térben a króma, és a színezeti szög

$$C_{ab}^* = \left[ (a^*)^2 + (b^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ és } h_{ab}^o = \arctg \frac{b^*}{a^*}.$$

Ha egy etalont (colour standard) jellemző értékek:

$$L^*_s, a^*_s, b^*_s \text{ és } C^*_s,$$



a mintát jellemzők pedig

$$L^*_M, a^*_M, b^*_M \text{ és } C^*_M$$

A minta és az etalon színínger különbsége:

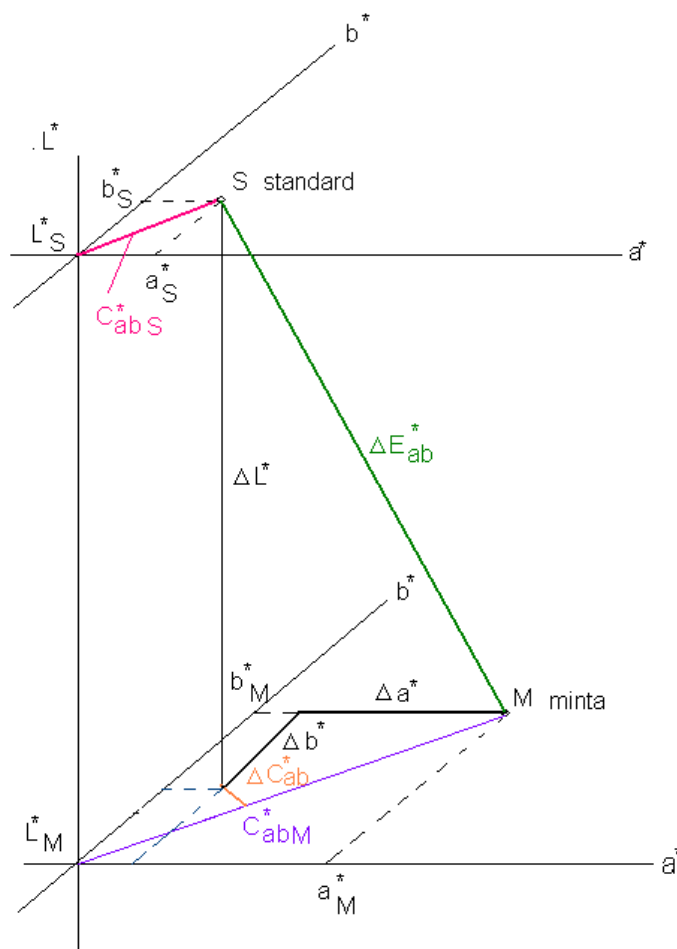
$$E^*_{ab} = \left[ (\Delta L^*)^2 + (\Delta a^*)^2 + (\Delta b^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

ahol  $\Delta L^* = L^*_M - L^*_S$ ,  $\Delta a^* = a^*_M - a^*_S$ ,  $\Delta b^* = b^*_M - b^*_S$  és  $\Delta C^*_{ab} = C^*_M - C^*_S$ .

A színezeti különbség:

$$\Delta H^*_{ab} = \left[ (\Delta E^*_{ab})^2 - (\Delta L^*_{ab})^2 - (\Delta C^*_{ab})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

A fenti mennyiségeket lehet ábrázolni az  $a^*$ ,  $b^*$  és  $L^*$  térben:



47. ábra CIELAB színínger térben egy etalon és egy minta pontja

### A mérés menete

MOMCOLOR 100 használati, mérési leírás. A mérőegység bekapcsolása a „Mains” kapcsolóval, a lámpa bekapcsolása a „Lamp” kapcsolóval és a kiértékelő számítógép bekapcsolása a hátlapján levő főkapcsolóval. A műszernek kb. félóra melegedésre van szüksége a mérés előtt. A mérés kezdetekor a 88-06-00 fehér etalonnal ellenőrizzük a műszer beállítását. A számítógép egység beállítása ekkor legyen

Baloldalon                           AUT (automatikus)  
 Középen jobboldalon            ST (standard)  
 Jobboldalon a szélen            C (C sugárzáseloszlás)

Nyomjuk meg kétszer a CE/C (Clear Entry) gombot. Fordítsuk a mérőfejen levő színszűrő készletet a „Z” állásba. Ekkor a mérőegységen a „Z” lámpa világít. A mérés akkor kezdődik, amikor először váltjuk „Z” állásból „X1” állásba a színszűrőket. Négy másodperc múlva a számítógépségen megjelenik az „X1” értéke. Forgassuk tovább a színszűrőket „X2”, „Y” és „Z” állásba, mindig kivárva a mérési időt. Ellenőrizzük, hogy az etalon hátoldalára felírt értékeket mértük-e. Ha eltérést tapasztalunk, a műszert újra hitelesíteni kell. Ezt csak a gyakorlatvezető végezheti el. Az etalon sikeres mérése esetén nyomjuk meg a számítógépségen az SA (sample) feliratú kapcsolót, ekkor kezdődik a mérés.

Helyezzük a mérendő objektumot (pl. almát) a mérőfejre, az etalon helyére. Mérjük meg a színének jellemzőit a fenti sorrendben: X1, X2, Y és Z színszűrőkkel.

Nyomjuk meg a START billentyűt a számítógépségen. Néhány perc múlva leolvashatjuk a CIELAB jellemzőket a képernyőről. Leolvasás után nyomjuk meg a „Φ”, majd a „0” billentyűt, utána ismét a „START”-t. Ekkor a műszer kiszámítja és kijelzi az „x”, „y” és „z” szín koordinátákat.

### ***Feladatok***

Az etalonra és a mintára kapott X, Y, és Z értékekből határozzuk meg az x, y, z, a\*, b\*, L\* értékeket. Számítsuk ki a krómát, a színezeti szöget. Ábrázoljuk a mért pontokat az x-y színdiagramon, valamint a CIELAB színiger térben. Számítsuk ki az etalon és a minta színiger különbségét és színezeti különbségét.

Az élelmiszeripari termékekre nem értelmeztek még szabványt, vagy kalibráló etalont. Ezért a színiger különbség számítását pl. egy alma piros és zöld oldala (a fedőszín és az alapszín) közötti eltérés számításával gyakoroljuk.

## Oldat törésmutatójának meghatározása Abbé-féle refraktométerrel

### Rövid elméleti összefoglaló

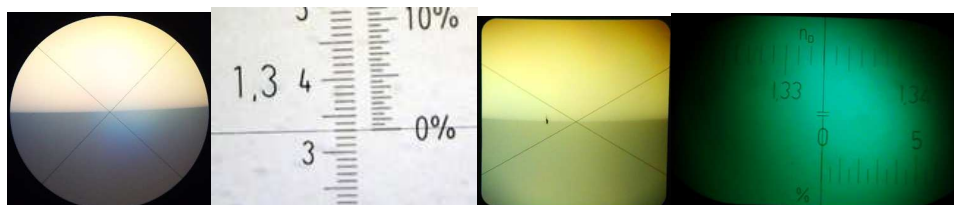
A fénysugár homogén közegben egyenes vonalban terjed, új közeghez érve megváltozik a fénysugár terjedési iránya (41. ábra). Ezt a jelenséget nevezzük fénytörésnek. A fénytörés mértékét a törésmutató adja meg. A „2” közeg „1” közegre vonatkoztatott törésmutatója,  $n$ :

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}, \text{ ahol } \alpha \text{ a beesési szög, } \beta \text{ a törési szög, } c_1 \text{ és } c_2 \text{ a fény terjedési sebessége az}$$

„1” és „2” közegben. Ha a fény optikailag sűrűbb közegből megy optikailag ritkább közegbe, akkor lesz egy olyan beesési szög,  $\alpha_h$ , amelynél a törési szög éppen  $90^\circ$ . Ha ennél nagyobb a beesési szög, akkor a fénysugár teljes visszaverődést szenved (42. ábra).

A refraktométerben két prizma helyezkedik el (43.B ábra). A két prizma között vékonyrétegben helyezkedik el a vizsgálandó oldat. Az felső a megvilágító prizma, amelynek a folyadékkal érintkező felülete matt. Ezt a prizmat megvilágítva a matt felületen keresztül minden irányba kerül fénysugár a vizsgálandó oldatba. Az oldat alatt helyezkedik el a mérő prizma, amelynek a törésmutatója nagy (1,5-1,7). Az oldatból a fény  $180^\circ$  szögben lép be a mérőprizmába, de a fénytörés miatt csak  $2\beta_h$  nyílásszögű kúpban halad tovább a prizmaiban.

Ezt a sugármenetet képezik le egy gyűjtőlencsével a lencse fókusz síkjára, ahol egy világos kör a látómező közepén, és egy sötét körgyűrű a látómező szélén jön létre. A fókusz síkban képződő világos és sötét terület határfelületét figyeljük meg egy távcsövön keresztül. A világos mező átmérője növekszik, ha a  $\beta_h$  szög értéke nő. Ha a távcsőben egy skálát is elhelyezünk, akkor a  $\beta_h$  értéke, vagy közvetlenül a törésmutató értéke olvasható le. Általában a törésmutató skála mellett egy másik skála is látható, amelyik a törésmutatónak megfelelő szárazanyag-tartalmat mutatja %-ban.



### Eszközök

- Abbé-féle refraktométer
- Oldat sorozat, desztillált víz
- Pipetta, törlő papír

### A mérés és az értékelés menete

- Desztillált víz cseppentése a mérőprizmára
- Prizmák összezárása
- A sötét-világos határ beállítása a fonálkereszt metszéspontjába
- Színi eltérés korrigálása (sötét-világos határa éles vonal, nincsenek színek)
- Törésmutató és szárazanyag tartalom leolvasása (víz törésmutatója: 1,333, sz.a. 0%)
- Ha eltérés van az irodalmi értéktől, az eltérés feljegyzése a mért értékek korrigálására
- Mérendő oldatok törésmutatójának és száraz anyag tartalmának leolvasása
- A törésmutató értékek ábrázolása a koncentráció függvényében
- Regressziós egyenes egyenletének meghatározása számolással
- Számított pontok alapján a regressziós egyenes berajzolása az ábrára
- Ismeretlen koncentráció meghatározása a regressziós egyenes alapján.
- Szárazanyag tartalmak korrigálása a hőmérsékletnek megfelelően.

Kiadott oldatsorozat törésmutatójának meghatározása, ismeretlen koncentráció kiszámítása

Koncentráció g/l								
Törésmutató								
Leolvasott szárazanyag tartalom								
Korrigált szárazanyag tartalom								

Hőmérséklet:.....

Víz törésmutatója:.....

Víz szárazanyag tartalma:.....

Regressziós egyenes

Meredeksége

Tengely metszete

Számolt pontok:

$c_1 = \dots\dots\dots$

$n_1 = \dots\dots\dots$

$c_2 = \dots\dots\dots$

$n_2 = \dots\dots\dots$

Ismeretlen koncentráció kiszámítása

## Színmérés

### Rövid elméleti összefoglaló

A szín mérése az emberi szem színérzékeléséhez igazított módszerekkel történik. A Commission Internationale de l'Éclairage 1931-ben elfogadta az emberi színlátáson alapuló trikrómikus színérzékelési mérőszámokat (színinger-összetevőket): X (vörös) 700 nm, Y (zöld) 546,1 nm, Z (kék) 435,8 nm. A színinger-összetevőkből a színkoordinátákat a következő összefüggések alapján lehet kiszámítani:  $x = \frac{X}{X+Y+Z}$ ,  $y = \frac{Y}{X+Y+Z}$ ,

$z = \frac{Z}{X+Y+Z}$ . A CIE x-y színdiagram tartalmazza a spektrumszíneket és a kevert színeket.

A tiszta spektrum színek a görbe vonalon vannak feltüntetve. A 45. ábrán fekete vonallal jeleztük az alap-színingerek által kifesztett gamut helyét. A különböző (nem tiszta) spektrumszínek a színdiagram egyes pontjai. Az „E” pont jelzi a „fehér” színt:  $x=0,333314$  és  $y=0,333288$ .

Az X, Y, és Z értékekből a CIELAB színjellelmzőket a következőképpen lehet meghatározni:

$$a^* = 500 \left[ \left( \frac{X}{X_o} \right)^{\frac{1}{3}} - \left( \frac{Y}{Y_o} \right)^{\frac{1}{3}} \right], \quad b^* = 200 \left[ \left( \frac{Y}{Y_o} \right)^{\frac{1}{3}} - \left( \frac{Z}{Z_o} \right)^{\frac{1}{3}} \right], \quad L^* = 116 \left( \frac{Y}{Y_o} \right)^{\frac{1}{3}} - 16.$$

Az  $a^*$  a vörös-zöld, a  $b^*$  a kék-sárga színezetre jellemző, az  $L^*$  a világossági tényező. Az  $X_o$ ,  $Y_o$  és  $Z_o$  értékek a fehérpont (E) adatai. A CIELAB színinger térben a króma, és a színezeti szög

$$C_{ab}^* = \left[ (a^*)^2 + (b^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{és} \quad h_{ab}^o = \arctg \frac{b^*}{a^*}.$$

### Eszközök

Colorlite hordozható színmérő műszer  
Alma

### A mérés és kiértékelés menete

A színmérő kalibrálása a fehér etalonokkal

Minta mérése

X, Y, Z meghatározása

x, y meghatározása és ábrázolása az x-y koordináta rendszerben (44. ábra szerint)

domináns hullámhossz meghatározása

Az  $a^*$ ,  $b^*$  és  $L^*$  CIELAB színkoordináták kiszámítása és ábrázolása a CIELAB színtérben

A króma és a színezeti szög meghatározása.

Alma zöld és piros oldalának szín koordinátáinak meghatározása, ábrázolása

Színinger különbség és színezeti különbség meghatározása és ábrázolása (46. ábra szerint)

## Alma zöld és piros oldalának szín jellemzőinek meghatározása

	X	Y	Z
Etalon			
Minta			

	x	y	z	a*	b*	L*	C	h	$\Delta H$	$\Delta E$
Alma zöld oldal										
Alma piros oldal										

## Szín koordináták kiszámítása

## CIELAB színjellemzők meghatározása

## Króma

## Színezeti szög

## Színinger különbség

## Színezeti különbség