Termisztor számításai

A tanszékünkön folyó mérési gyakorlatokon NTK típusú termisztorokat vizsgálunk. Kétféle létezik:

PTK Pozitív Tempertúra Kvóciens és NTK Negtív Temperatúra Kvóciens (angolul PTC és NTC). Ez utóbbi azért előnyös, mert a környezeti hőmérséklettartományban elég nagy a metrológiai értelemben vett érzékenysége. Sajnos, azonban a negatív hőmérsékleti karakterisztikája viszonylag szűk tartományban közelíthető egyenessel. Ha az egyenes szakasz végére is ki akarjuk terjeszteni a közelítést, szükségünk van magasabb rendű tagok figyelembevételére is. Az egyik ilyen – és széles körben alkalmazott – közelítés a **Steinhart–Hart egyenlet**. Az egyenletek az abszolút hőmérséklet reciproka és az ellenállás logaritmusa közötti közel lineáris kapcsolatra épülnek. (*John Shannon Steinhart* és *Stanley Robert Hart* közleménye alapján)

$ln\ R = \ln R_0 + \frac{B}{T}$ Ennek változói a baloldalon az R ellenállás, jobboldalon a T abszolút hőmérséklet. Formájában az **Arrhenius egyenletet** követi, mert ott is *reciprok és logaritmus* a változók módosító függvénye. Jobboldalon konstansa az egyenletnek egy olyan $ln\ R_0$, amely konstansa az egyenletnek, valamint a számlálóban a B energiaállandó, amely az elektronok ΔH kicserélődési entalipájából és az R_m univerzális gázállandóból származtatható. Két változóból két ismertlen számítható ki. Ha képzeletben végtelenségig növeljük a hőmérsékletet, akkor a tört nullává válik, és magára marad a két logaritmusos tag. $ln\ R = \ln R_0$. Mivel ez a végtelen hőmérséklethez tartozik, szokás így is jelölni: $ln\ R = \ln R_\infty$; megfogalmazva: az ellenállás logaritmusa, ha a hőmérséklet a végtelenhez tart. Ez csak képzeletbeli érték; konstansa az egyenletnek; a legtöbb termisztor már 150°C-on tönkremegy. Az ellenállás-konstans jelölése félreértésre ad alkalmat, mert a nulla index általában a nulla Celsius fokra szokott vonatkozni.

Steinhart és Hart a baloldalra helyezte a hőmérsékletet tartalmazó tagot, jobboldalt az ellenállást tartalmazó tagokat megtoldotta eggyel: ez az ellenállás logaritmusának harmadik hatványa. Ez az egyenlet tehát így néz ki: $\frac{1}{T} = A + B \ln R + C(\ln R)^3$. Ettől a közelítés polinom formáját veszi fel; pontatlan középen, de jó közelítést ad a mérési tartomány két végén. Három változóból három ismertlen számítható ki.

Az EXCEL-lel való számítást már ismertettük egy másik lapon. Most mindjárt azt a változatot mutatjuk be, amely később a többváltozós regresszióra való kiterjesztés is lehetővé teszi. A munkalap képe a következő oldalra került. Itt mindjárt ismertetjük a számítás menetét. Kijelöljük a statisztikai változók tervezett elhelyezkedését, itt most a G3 cellától két sort és öt oszlopot. Ekkor elkezdjük beírni a függvényt: LIN.ILL(E3:E16;D3:D16;Igaz;Igaz). Ha ez készen áll megnyomjuk egyszerre a **shift-CTRL-ENTER** billentyűket. Ez azért szükséges, mert tömbképletet viszünk be. Ha ilyen módon választjuk meg a független változót és a függő változót, akkor az előre várt formában kapjuk a kimeneti változók értékét. Az első sorba kerül a meredekség és a tengelymetszet. aktuálisan B energiaállandó 3038,9 K, a tengelymetszet ln(R_0)=-1,976. A következő sorba kerül ezek szórása.

meredekség	tengelymetszet
meredekség szórása	tengelymetszet szórása
determinációs együttható	függő változó szórása
F próba	szabadsági fok
a regresszió szórásnégyzete (ssreg)	a maradék szórásnégyzet (ssresid)

Jelen esetben az ssreg nagyobb, mint az ssresid (residuum; maradék), következésképp a tapasztalt szórásért nem a véletlen, hanem a regresszió felelős.

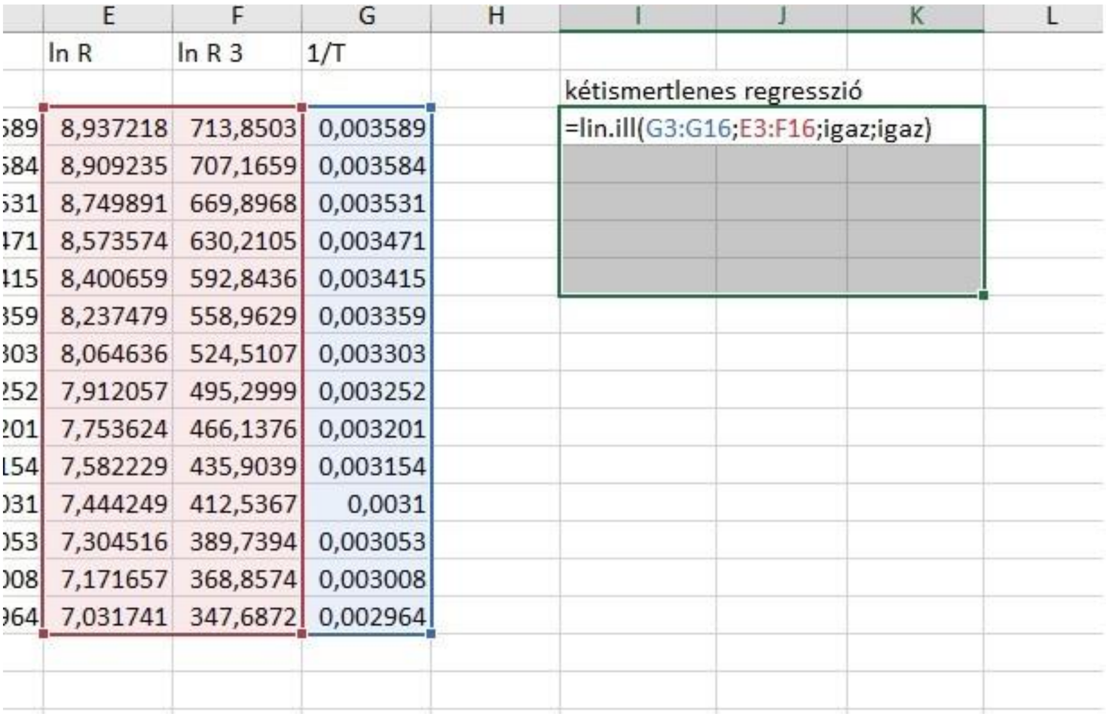
Így jelöljük ki a regressziós számításhoz a bemeneti változókat (az adatok a Tanszéken található egyik termisztorra vonatkoznak):

	D	E	F	G	H	I	J
	1/T	ln R					
	1/K			egyváltozós lineáris regresszió			
10	0,003589	8,937218		=lin.ill(E3:E16;D3:D16;igaz;igaz)			tengelymetszet
00	0,003584	8,909235				szórása	
10	0,003531	8,749891				determinációs együttható	
90	0,003471	8,573574					
50	0,003415	8,400659					
80	0,003359	8,237479					
80	0,003303	8,064636					
30	0,003252	7,912057					
30	0,003201	7,753624					
63	0,003154	7,582229					
10	0,0031	7,444249					
87	0,003053	7,304516					
02	0,003008	7,171657					
32	0,002964	7,031741					

T	R	1/T	ln R					
K	Ohm	1/K			egyváltozós lineáris regresszió			
278,6	7610	0,003589	8,937218		3038,932	-1,97631	meredekség	tengelymetszet
279	7400	0,003584	8,909235		11,71956	0,038569	szórása	
283,2	6310	0,003531	8,749891		0,999822	0,009024	determinációs együttható	
288,1	5290	0,003471	8,573574		67238,72	12		
292,85	4450	0,003415	8,400659		5,47536	0,000977		
297,75	3780	0,003359	8,237479					
302,75	3180	0,003303	8,064636					
307,55	2730	0,003252	7,912057					
312,45	2330	0,003201	7,753624					
317,05	1963	0,003154	7,582229					
322,55	1710	0,0031	7,444249					
327,55	1487	0,003053	7,304516					
332,4	1302	0,003008	7,171657					
337,4	1132	0,002964	7,031741					

A közelítő függvényt most már felírhatjuk: $\ln R = -1{,}97631 + \frac{30382932}{T}$. Tekintettel arra, hogy a termisztorok katalógusadata a +25°C hőmérséklethez tartozó ellenállás, tegyünk ezzel egy próbát: $\ln R = -1{,}97631 + \frac{30382932}{273{,}15+25} = 8{,}2163$, s ebből az ellenállás R=$e^{8{,}2163} = 3700{,}86\ Ohm$.

A Steinhart–Hart-egyenlet nem az ellenállást, hanem a hőmérsékletet emeli ki (erre a célra találták ki). Emiatt át kell rendeznünk az EXCEL táblázatot. Az egyenlet elvi formája kiegészül egy harmadfokú taggal. Ennek fizikai magyarázata nincs, célja csupán jobb matematikai közelítés elérése. Az eredmény számára most eggyel szélesebb területet jelöltünk ki. Ezt a szürke háttér jelzi. Utána beírjuk a regressziós számítás adatait, majd a szokott módom Shift-CTLR-Enter megnyomásával érvényesítjük.



	E	F	G	H	I	J	K	L
	ln R	ln R 3	1/T					
					kétismertlenes regresszió			
;89	8,937218	713,8503	0,003589		=lin.ill(G3:G16;E3:F16;igaz;igaz)			
;84	8,909235	707,1659	0,003584					
;31	8,749891	669,8968	0,003531					
171	8,573574	630,2105	0,003471					
115	8,400659	592,8436	0,003415					
359	8,237479	558,9629	0,003359					
303	8,064636	524,5107	0,003303					
252	7,912057	495,2999	0,003252					
201	7,753624	466,1376	0,003201					
154	7,582229	435,9039	0,003154					
)31	7,444249	412,5367	0,0031					
)53	7,304516	389,7394	0,003053					
)08	7,171657	368,8574	0,003008					
)64	7,031741	347,6872	0,002964					

Íme az eredmény. Az első sorban a keresett három együttható áll úgy, hogy az utolsó a konstans; a szokásos jelöléssel C, B, és A.

ln R	ln R 3	1/T				
				kétismeretlenes regresszió		
8,937218	713,8503	0,003589		6,1973E-09	0,000328	0,000657
8,909235	707,1659	0,003584		1,0637E-07	2,06E-05	0,00011
8,749891	669,8968	0,003531		0,99982162	3,1E-06	#HIÁNYZIK
8,573574	630,2105	0,003471		30827,2609	11	#HIÁNYZIK
8,400659	592,8436	0,003415		5,9278E-07	1,06E-10	#HIÁNYZIK
8,237479	558,9629	0,003359				
8,064636	524,5107	0,003303				
7,912057	495,2999	0,003252				
7,753624	466,1376	0,003201				
7,582229	435,9039	0,003154				
7,444249	412,5367	0,0031				
7,304516	389,7394	0,003053				
7,171657	368,8574	0,003008				
7,031741	347,6872	0,002964				

A második sorban ezek szórása látható. A hibaüzenet (#HIÁNYZIK) azért jött létre, mert csak két független változónk van. Ide akkor kerülhetne érték, ha nagyobb lenne a független változók száma. A harmadik sorban látjuk a már ismert determinációs együtthatót és a közelítés jóságát. Lejjebb az F-próba, majd a szabadsági fok értéke látható. Végül az utolsó sorban az eltérések szórásnégyzetét. Ezek azért ilyek kis számok, mert a hőmérséklet reciprokára vonatkozik, amely eleve igen kis szám.

Van az eljárásnak egy hibája. A matematikai statisztikában ugyanis a változóknak egymástól függetleneknek kell lenniük. Jelen esetben ez nem áll fenn, ugyanis az ellenállás logaritmusa és annak harmadik hatványa nem függetlenek egymástól, hiszen aritmetikai művelettel hoztuk létre egyiket a másikból. Eljárásuknak célja nem is a statisztikai összefüggés keresése, hanem a lehető legjobban illeszkedő függvény keresése. Másként fogalmazva: az illeszkedés jóságát kereshetjük az elsőfokú, vagy a harmadfokú közelítésben is. De úgy döntöttünk, hogy mindkettőt egyaránt figyelembe vesszük.

$$\frac{1}{T} = A + B(lnR) + C(lnR)^3 = 0{,}000657 + 0{,}000328(\ln\mathrm{R}) + 6{,}1973^{-9}(lnR)^3$$

Legyen a termisztor névleges ellenállása 3700 Ohm, ennek logaritmusa 8,216. Ebből a hőmérséklet reciproka:

$$0{,}000657 + 0{,}000328 \cdot 8{,}216 + 6{,}1973^{-9} \cdot 554{,}6197 = 0{,}003354 = \frac{1}{298{,}16}$$

Márpedig 298,16 K = 25,012 °C. Ezzel igazoltuk, hogy a termisztor névleges ellenállása 3700 Ω

A közelítés jóságáról

Felmerül a kérdés, hogy nyújt-e vajon többletet, ha a közelítő függvényt kiegészítjük a harmadfokú taggal. A fenti méréseknél úgy látszik, mintha felesleges volna. A mérések +5 °C és +64 °C között történtek, a termisztor lineáris szakaszán. Az eredményt a determinációs együtthatók összehasonlításával végezhetjük el. Mellette a hőmérsékletkülönbségek szórása képviseli a konfidencia intervallumot. (Ennél a hallgatói mérések pontatlanabbak lesznek a termosztát gyakorlatlan kezelése és a felvett kevesebb mérési pont következtében.) A mérés tárgya egy REMIX gyártmányú tárcsatermisztor volt. A Steinhart–Hart közelítést egy-, vagy kétváltozós lineáris regressziós számításból vett adatokkal végeztük.

lineáris közelítésnél	0,999822	±0,27963 °C
Steinhart–Hart közelítésnél	0,999821	±0,27941 °C

Álljon itt az összehasonlítás kedvéért egy példa. Az adatok egy csereszabatos, epoxi burkolatú termisztorra vonatkoznak. Adatait a https://www.sensorsci.com/thermistors adta közre a WM202C típusra -40°C és +150°C fok közötti tartományra. Ennek a típusnak a hivatalos értéktűrése ±0,2 °C. Névleges ellenállása 2000 Ω. Az ellenállás névleges tűrése 25°C-on 0,88%. A harmadik oszlopban a hőmérsékletnek a közelítő függvénytől való eltérése látható.

lineáris közelítésnél	0,9996762	±1,10995 °C
Steinhart–Hart közelítésnél	0,9999993	±0,07285 °C

Mind a determinációs együttható mind a hőmérséklet szórása (a konfidencia intervallum) igazolja, hogy ilyen esetben szükség van a Steinhart–Hart-közelítés kiszámítására. (A kiértékelésnél nem az adatlapon közölt együtthatókat használtuk, hanem egy olyan számításból származó értékeket, amelyeket illusztrációként fent közöltünk.)

Látható a fent ismertetett leírásból, hogy ez a közelítés arra a célra készült, hogy ellenállásmérésből megállapíthassuk a hőmérséklet értékét. A számítást fordítva már nehezebb elvégezni, hiszen harmadfokú egyenletünk van, s erre nincs zárt megoldóképlet. Segítséget nyújthat az EXCEL egyik szolgáltatása, a solver.

Diákok számára kedvezményesen hozzáférhető egy általános matematikai szolgáltatást nyújtó weblap, a https://www.wolframalpha.com. Ez az alapvető számításoknál ingyenes. Amennyiben a Steinhart–Hart harmadfokú egyenlet megoldására használjuk, a következő megoldáshoz érdemes folyamodni.

Írjuk be külön az egyenlet konstansát is és a hőmérséklet reciprokát is, amelyeket egyébként egyszerűsítenünk kellene. Így ugyanis tetszőleges hőmérsékletre is kereshetünk megoldást (ezúttal az ellenállás logaritmusát).

A másik, amit figyelembe kell vennünk, hogy a számértékek különböző nagyságrendűek (például a hőmérséklet reciproka), ezért nagyon sok számjegyű formában kell beírnunk ahhoz, hogy jó eredményt kapjunk. A fenti példákban az EXCEL alapvető számábrázolási formátumában láttuk az értékeket, ezeket most valamennyi rendelkezésünkre álló számjeggyel be kell írnunk. Használjunk amerikai szabvány szerint tizedespontot tizedesvessző helyett.

Az egyenletet *nullára rendezzük*, ezért a hőmérséklet reciproka negatív előjellel kerül a képletbe. A megoldandó képlet elvi formája a következő:

$$-\frac{1}{T}+A+B\cdot(\ln R)+C\cdot\ (\ln R)\text{^}3$$

a WM202C saját számítású számadataival:

-0.00335401643468053+0.00149796971135114+0.000238096497635922*x+1.05689443823125E-07*x^3

25 °C-ra a következő megoldást kapjuk: x≈7.600461024626; tehát =KITEVŐ(7,600461024626)=1999,117 Ω ≈ 2000 Ω

0 °C-ra a megoldás: x=8.783811594337 tehát; =KITEVŐ(8,783811594337)=6527,71 Ω

Ha nullát írunk a hőmérséklet reciproka helyére, akkor a végtelen hőmérséklethez tartozó ellenállás logaritmusát kapjuk:

x=-6.1863447691579; tehát =KITEVŐ(-6, 1863447691579)= 0,0020573 Ω, ez az $\ln R_\infty$

(A =KITEVŐ az EXCEL-ben az exponenciális függvény; a logaritmus inverze.) Ennek a harmadfokú egyenletnek egy valós és két képzetes megoldása van. A függvény ábráján azért nem látjuk a harmadfokú függvényre jellemző görbületet, mert igen kicsi számértékekre számította ki a fenti szolgáltató.